Sistemi lineari ARX

Ricordiamo la definizione di sistema ARX data a suo tempo:

Definizione

Sia E l'insieme di eventi costituito dallo spazio vettoriale $\Re \times \Re$ e sia $T = \mathbf{Z}$ (insieme dei numeri relativi). Un sistema dinamico orientato $\Sigma \subseteq \Omega = E^T$ del tipo

$\Sigma = \{(y(t), u(t)) \in \Re\times\Re$ *tali che*

$$y(t) = a_1y(t\text{-}1)+a_2y(t\text{-}2)+\ldots+a_{na}y(t\text{-}na)+b_1u(t\text{-}1)+b_2u(t\text{-}2)+\ldots+b_{nb}u(t\text{-}nb) \quad (6.1)$$

per $t \in I \subseteq T$ }

viene detto *sistema dinamico lineare a tempo discreto (di tipo) ARX.*

Intenderemo sempre un sistema ARX come un sistema orientato nel quale $u(t)$ è l'ingresso e $y(t)$ è l'uscita. Osserviamo che stiamo limitando il nostro studio a sistemi con un solo canale di ingresso e un solo canale di uscita (sistemi SISO).

Sistemi lineari ARX

L'utilizzo di modelli descritti solo in termini di variabili di ingresso e di uscita equivale a considerare i sistemi fisici come degli oggetti di tipo black-box, il cui funzionamento interno rimane "nascosto", come se si svolgesse all'interno di un contenitore dalle pareti non trasperenti (una black-box).

L'uso di modelli black-box risulta naturale in tutte le situazioni nelle quali non si può osservare funzionamento interno del sistema fisico e non si conoscono le leggi che lo regolano.

In tali situazioni, la costruzione di un modello di tipo ARX deve basarsi solo sull'osservazione del comportamento del sistema tramite le variabili di ingresso e uscita (esterne).

Sistemi lineari ARX

Ricordiamo che nell'**equazione alle differenze**

$$y(t) = a_1y(t-1)+a_2y(t-2)+\ldots+a_{na}y(t-na)$$

$$[+b_0u(t)]+b_1u(t-1)+b_2u(t-2)+\ldots+b_{nb}u(t-nb)$$

supporremo sempre di avere na $\geq$ nb.

Come già detto a suo tempo, na in queste condizioni misura la complessità del sistema.

Diremo che na è l'ordine del sistema.

ESEMPIO

Un esempio semplice di sistema ARX del primo ordine è quello che descrive l'andamento di un deposito bancario sul quale sia applicato un interesse composto **r**, ad esempio del **r** = 5% = 0,05, computato in **n** periodi all'anno, ad esempio n =2 (cioè in periodi di sei mesi).

Posto

- y(k) = quantità di denaro alla fine del k-esimo periodo di accreditamento
- u(k) = totalità dei versamenti fatti durante il k-esimo periodo di accreditamento

il modello del sistema risulta essere

y(k)= (1+r/n) y(k-1) + u(k) = 1,025 y(k-1) + u(k)

$$\boxed{y(k) = y(k-1) + \frac{r}{n} y(k-1) + u(k)}$$

OSSERVAZIONE

Altri esempi importanti sono forniti da sistemi più generali di tipo non lineare.

ESEMPIO

Algoritmo di calcolo della radice quadrata.

$$\boxed{y(k) = \frac{1}{2}\left[y(k-1) + \frac{u}{y(k-1)} \right]}$$

OSSERVAZIONE SULLA SCELTA DEL TEMPO DISCRETO

Nell'esperienza umana il tempo fluisce con continuità ma spesso le grandezze di interesse nello svolgimento di un dato fenomeno sono percepite in istanti di tempo discreti.

In particolare, le variabili di ingresso e di uscita di un sistema dinamico possono essere definite in istanti discreti di tempo.

Esempi

Sistemi di calcolo (l'utilizzo di descrizioni in tempo discreto è motivato dal funzionamento intrinseco del sistema).

Sistemi a variabili campionate (l'utilizzo di descrizioni in tempo discreto è motivato dalle modalità di raccolta e registrazione dati).

COMPONENTI ELEMENTARI DEI SISTEMI LINEARI A TEMPO DISCRETO

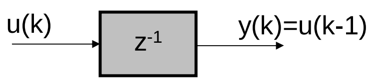
- La rappresentazione di un sistema ARX dato dalla corrispondente equazione alle differenze deve poter essere esplicitata in maniera semplice per consentirne la manipolazione e l'implementazione su calcolatore.

- A questo scopo è possibile utilizzare uno schema grafico ottenuto componendo un certo numero di elementi (blocchi) di base.

Elementi fondamentali della notazione grafica

- BLOCCO RITARDO UNITARIO

$$y(k) = u(k-1)$$



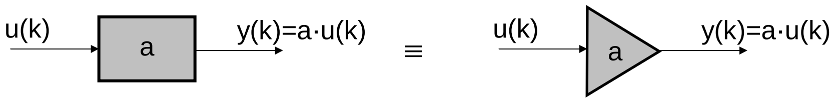
- Per ora ci si limita a considerare l'operatore z^{-1} applicato al campione u(k) come una pura rappresentazione grafica del ritardo unitario

NOTA

In realtà sarà utile, in seguito, considerare z come una variabile complessa

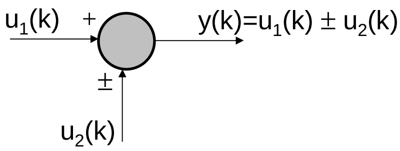
➢ BLOCCO MOLTIPLICATORE PER UNA COSTANTE

$$y(k) = a \cdot u(k)$$



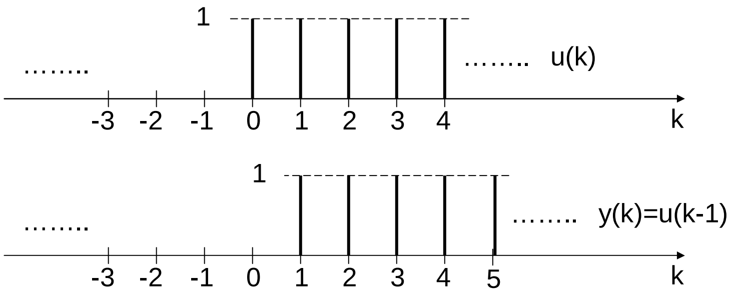
➢ BLOCCO SOMMATORE

$$y(k) = u_1(k) + u_2(k)$$



➢ OPERAZIONE DI RITARDO

Illustrata osservandone l’effetto su una sequenza



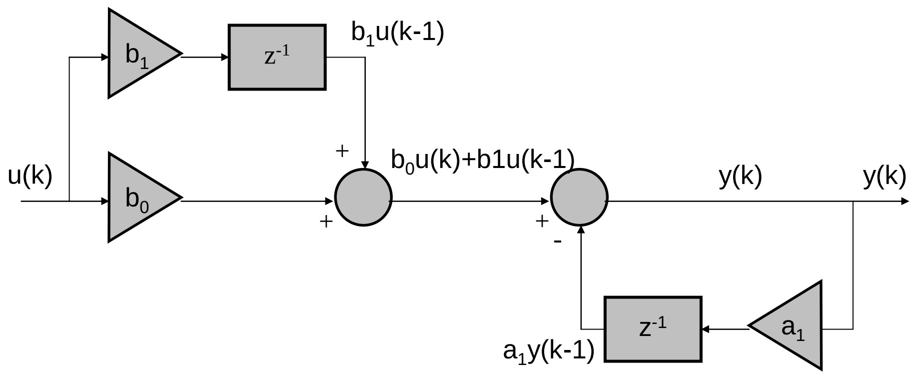
- Un calcolatore può implementare ognuna delle operazioni rappresentate dagli operatori elementari
- Il ritardo unitario è realizzato da una memoria dove u(k-1) è memorizzato all’istante (k-1), mantenuto fino all’istante k ed infine richiamato all’istante k

- I moltiplicatori devono prevedere la capacità di memorizzare la costante moltiplicativa “a”
- I sommatori non richiedono memoria

Usando questa notazione si possono rappresentare efficacemente (esistono linguaggi di programmazione visuale) sistemi ARX descritti da equazioni alle differenze

- ESEMPIO

$$y(k)=b_0\,u(k) + b_1\,u(k-1) - a_1\,y(k-1)$$

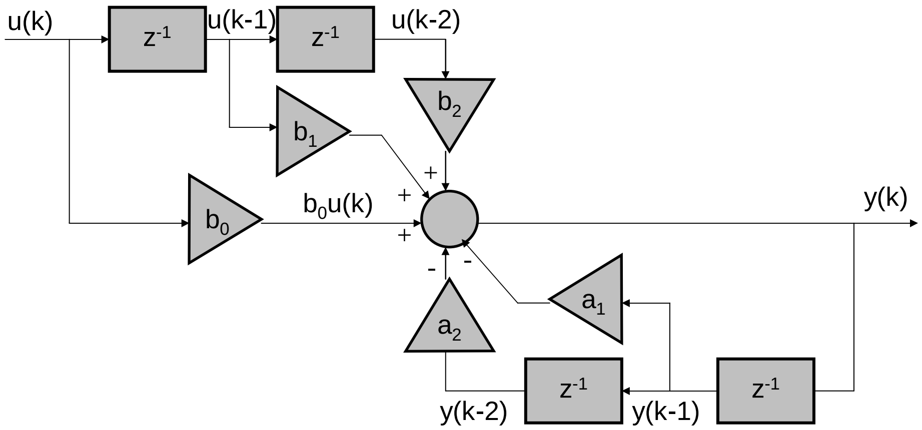


NB La rappresentazione non è unica

Evidentemente la tecnica di rappresentazione è generalizzabile

- ESEMPIO: Sistema del II°ordine

$$y(k)=b_0\, u(k) + b_1\, u(k-1) + b_2\, u(k-2) - a_1\, y(k-1) - a_2\, y(k-2)$$



SEGNALI A TEMPO DISCRETO

• Un segnale a tempo discreto e a valori in $\Re$ è una funzione da T= Z (insieme dei numeri relativi) in $\Re$.

• In pratica, un segnale a tempo discreto e a valori in $\Re$ **{*u*(*k*)}** è una sequenza ordinata di numeri reali che di solito viene rappresentata come

$$\{u(k)\}: \ldots\ u(-2),\ u(-1),\ u(0),\ u(1),\ u(2),\ \ldots.$$

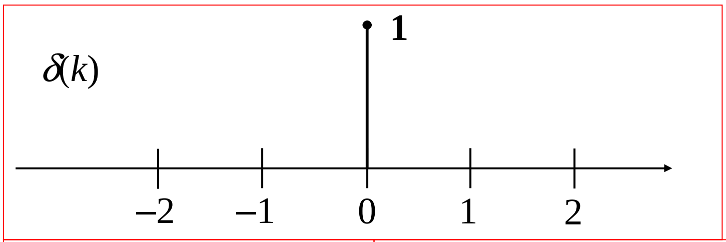
SEGNALI CANONICI

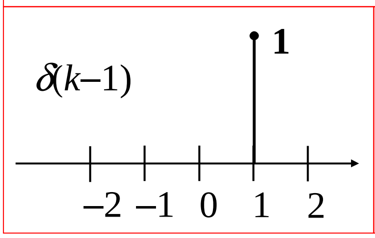
Segnali semplici di uso assai frequente come ingressi sono:

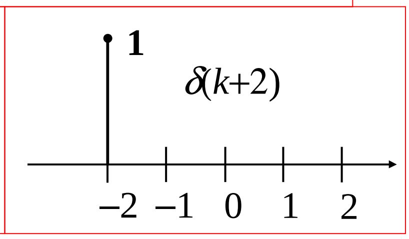
- ✓impulso di Dirac;
- ✓costante unitaria da un certo istante in poi (gradino);
- ✓valori unitari alternanti;
- ✓sequenza disposta secondo una rampa unitaria.

Impulso Dirac (Delta di Kronecker)

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & se \quad k = 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

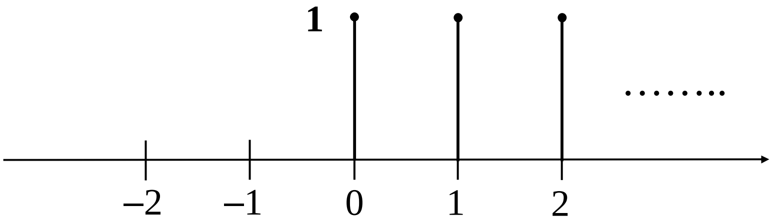






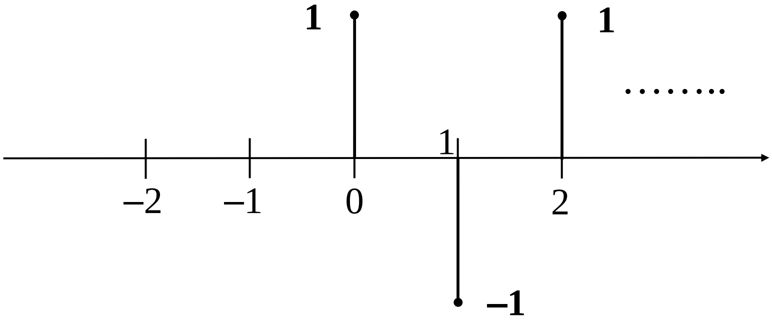
Sequenza unitaria (gradino)

$$u(k) = \begin{cases} 0 & se \quad k < 0 \\ 1 & se \quad k \geq 0 \end{cases}$$



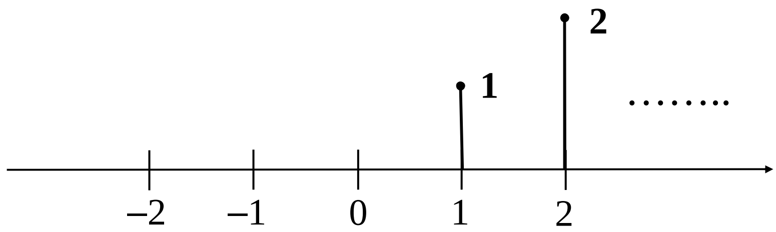
Sequenza alternante

$$u(k) = \begin{cases} 0 & se \quad k < 0 \\ (-1)^k & se \quad k \geq 0 \end{cases}$$



Sequenza a rampa unitaria

$$u(k) = \begin{cases} 0 & se \quad k < 0 \\ k & se \quad k \geq 0 \end{cases}$$



ALGEBRA DEI SEGNALI A TEMPO DISCRETO

•Sui segnali a tempo discreto si definisce un'algebra composta dalle seguenti operazioni:

✓somma (differenza) di due sequenze di numeri:

date le sequenze $\{u_1(k)\}, \{u_2(k)\}$ la somma (differenza) $\{u(k)\}$ è definita da:

$$u(k) := u_1(k) + u_2(k) \quad (\, u(k) := u_1(k) - u_2(k) \,) \ \forall k$$

✓moltiplicazione di una sequenza di numeri per una costante:

data le sequenze $\{u_1(k)\}$, la sua moltiplicazione per una costante $a \in \Re$ è $\{u(k)\}$ definita da:

$$u(k) := a \cdot u_1(k) \quad \forall k$$

ALGEBRA DEI SEGNALI A TEMPO DISCRETO

Utilizzando i segnali canonici che abbiamo descritto e le regole di composizione dell'algebra dei segnali a tempo discreto possiamo generare segnali più complessi da utilizzare come ingressi per i nostri sistemi.

La proprietà di linearità dei sistemi ARX (ricordare cosa significa) ci permette di studiare in maniera semplice il comportamento del sistema in risposta a tali segnali più complessi attraverso lo studio del comportamento in risposta ai segnali più semplici.

RAPPRESENTAZIONE MEDIANTE SOMMA DI CONVOLUZIONE

La rappresentazione di un sistema lineare a tempo discreto mediante equazione alle differenze del tipo

$$y(k) = a_1\, y(k-1) + a_2\, y(k-2) + \ldots + a_{na}\, y(k-na)$$

$$[+b_0\, u(k)] + b_1\, u(k-1) + b_2\, u(k-2) + \ldots + b_{nb}\, u(k-nb)$$

si presta bene ad un'analisi puntuale del comportamento, cioè a valutare il valure dell'uscita per ciascun singolo istante di tempo e ad un'implementazione automatica, ma

- non consente di esprimere l'uscita in funzione del solo ingresso
- non consente una agevole analisi globale della funzione y(t).

Per ottenere questi risultati occorre utilizzare differenti modi di rappresentare il comportamento del sistema in oggetto.

Per rispondere alla prima esigenza che abbiamo menzionato si ricorre in particolare ad una rappresentazione detta rappresentazione mediante somma di convoluzione.

NOTA

È di fondamentale importanza, quando si introducono rappresentazioni formalmente differenti per uno stesso oggetto, come un sistema lineare a tempo discreto, chiarire in che senso tali rappresentazioni si equivalgano.

Per quanto riguarda ciò che ci interessa in questa situazione, possiamo dire che la rappresentazione mediante somma di convoluzione equivale a quella mediante equazione alle differenze nel senso che esse determinano lo stesso insieme di comportamenti a partire da condizioni iniziali nulle.

In generale, una rappresentazione mediante somma di convoluzione esprime y(k) come una combinazione lineare di tutti i campioni passati dell'ingresso

Essa ha dunque la forma:

$$y(k) = h(0)u(k) + h(1)u(k-1) + h(2)u(k-2) + ... = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \times u(k-i)$$

Per comprendere come si possa ottenere una rappresentazione mediante somma di convoluzione per un sistema lineare a tempo discreto, iniziamo a considerare il caso di un sistema descritto originariamente in forma ARX del primo ordine.

Dato

$$y(k) = b_0\, u(k) + b_1\, u(k\text{-}1) - a_1\, y(k\text{-}1)$$

$$b_0,\ b_1,\ a_1 = \text{costanti fissate}$$

- Si assuma che un segnale di ingresso sia applicato a questo sistema a cominciare da k=0, con condizione iniziale $y(-1)=0$
- Allora si ha:

k=0 $\quad y(0) = b_0u(0)$

k=1 $\quad y(1) = b_0u(1) + b_1u(0) - a_1y(0) =$

$\quad = b_0u(1) + b_1u(0) - a_1b_0u(0) =$

$\quad = b_0u(1) + (b_1 - a_1\, b_0)u(0)$

k=2 $\quad y(2) = b_0u(2) + (b_1 - a_1\, b_0)u(1) - a_1(b_1 - a_1\, b_0)u(0)$

- In generale si ottengono espressioni del tipo

$$y(k) = h(0)\, u(k) + h(1)\, u(k-1) + \ldots + h(k)\, u(0)$$

dove

- $h(0)= b0$
- $h(i) = (-a_1\,)^{i-1}(b_1 - a_1\, b_0)$

DEFINIZIONE

La sequenza h(0), h(1), h(2), …., viene chiamata sequenza dei pesi relativa al sistema in questione.

ESEMPIO: CONTO DI RISPARMIO

- Si consideri il modello di un sistema conto di risparmio il quale offre un tasso di interesse del 5% ($r=0,05$) computato semestralmente ($n=2$), allora posti:

  - $y(k)$ = quantità di denaro alla fine del k-esimo periodo di accreditamento
  - $u(k)$ = totalità dei versamenti fatti durante il k-esimo periodo di accreditamento

  il modello del sistema risulta essere

$$y(k)=u(k) + (1+r/n)\, y(k-1) = u(k) + 1,025\, y(k-1)$$

- **Ipotesi:** un cliente inizia un versamento in $k=0$ ed effettua la sequenza di depositi $u(0), u(1), u(2), \ldots$

  La risposta del sistema negli istanti $k=0,1,2, \ldots$ sarà descritta dalle equazioni:

K=0	$y(0)=u(0) + 1,025y(-1) = u(0)$
	$y(-1)=0$ poiché il conto è stato aperto in $k=0$
K=1	$y(1)=u(1) + 1,025y(0) = u(1) + 1,025u(0)$
K=2	$y(2)=u(2) + 1,025u(1) + (1,025)^2u(0)$
K=3	$y(3)=u(3)+1,025u(2)+(1,025)^2u(1)+(1,025)^3u(0)$
$\vdots$	$\vdots$

Una attenta ispezione della relazione y(k) per k=0,1,2,3,… rivela che l'uscita all'istante k dipende da una somma di termini composti da:

1. L'ingresso attuale u(k) moltiplicato per 1
2. L'ingresso u(k-1) ad un istante precedente all'attuale moltiplicato per 1,025
3. L'ingresso u(k-2) a due istanti precedenti moltiplicato per $(1,025)^2$
4. L'ingresso u(k-3) a tre istanti precedenti moltiplicato per $(1,025)^3$

Se volessimo continuare per k=4,5,6,7, …., il comportamento del modello resterebbe lo stesso

Iterando la procedura fino al generico k-esimo istante non faremo altro che formulare la rappresentazione in somma di convoluzione del sistema infatti si avrà

$$y(k)=u(k)+1,025u(k-1)+(1,025)^2u(k-2)+ \ldots +(1,025)^k u(0)$$

$$k \geq 0$$

Rispetto all'equazione di partenza che descriveva il sistema, tale equazione dipende esclusivamente dai valori presenti e passati dell'ingresso.

L'equazione alle differenze di partenza e l'equazione finale in somma di convoluzione generano la stessa risposta del sistema per lo stesso ingresso per cui si possono ritenere essere equivalenti.

Esempio

- Si determini la sequenza di pesi per il sistema ARX caratterizzato da

$$y(k) = \beta\, u(k) + \alpha\, y(k-1)$$

- La precedente espressione ha la stessa forma dell'equazione alle differenze relativa ad un sistema del primo ordine

$$y(k) = b_0\, u(k) + b_1\, u(k-1) - a_1\, y(k-1)$$

(ponendo $a_1 = -\alpha$, $b_0 = \beta$, $b_1 = 0$)

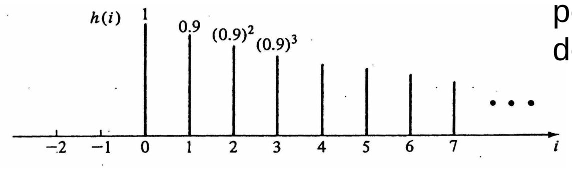
la cui sequenza di pesi è

$$\begin{cases} h(0) = b_0 \\ h(i) = \{b_1 - a_1 b_0\}(-a_1)^{i-1}, \quad i = 1,2,3,\dots \end{cases}$$

- Quindi per il sistema considerato si ha:

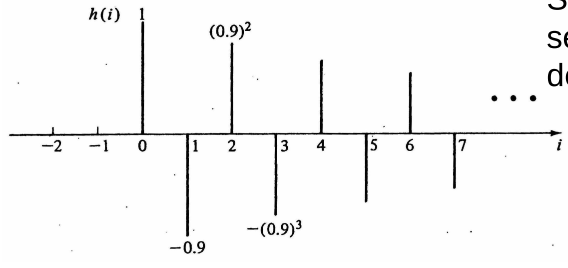
$$h(i) = \beta\,(\alpha)^i \quad i = 0,1,2,\dots$$

$\alpha = 0.9,\ \beta = 1$



Sequenza positiva decrescente

$\alpha = -0.9,\ \beta = 1$



Sequenza con segni alternati decrescente

ESERCIZIO

Ricavare una rappresentazione che faccia uso della somma di convoluzione per la risposta del sistema

$$y(k) = b_0\, u(k) + b_1\, u(k-1) - a_1\, y(k-1)$$

ad una sequenza di ingresso applicata a k=0 con condizioni iniziali non nulle $y(k-1) = y_0 \neq 0$

$y(0) = b_0 u(0) + b_1 \cdot 0 - a_1 y_0$

$y(1) = b_0 u(1) + b_1 u(0) - a_1 y(0) = b_0 u(1) + b_1 u(0) - a_1 b_0 u(0) + (a_1)^2 y_0 =$

$= b_0 u(1) + [b_1 - a_1 b_0]\, u(0) + (a_1)^2 y_0$

$y(2) = b_0 u(2) + b_1 u(1) - a_1 y(1) =$

$= b_0 u(2) + b_1 u(1) - a_1 b_0 u(1) - a_1 b_1 u(0) + (a_1)^2 b_0 u(0) +- (a_1)^3 y_0 =$

$= b_0 u(2) + [b_1 - a_1 b_0]\, u(1) + [(a_1)^2 b_0 - a_1 b_1] u(0) - (a_1)^3 y_0$

$y(k) = h(0)u(k) + h(1)u(k-1) + \ldots + h(k)u(0) + (-a_1)^{k+1} y_0$

$h(0) = b_0 \qquad h(i) = (b_1 - a_1 b_0)(-a_1)^{i-1}$

NOTA

Confronto fra le due rappresentazioni

- Equazioni alle differenze vantaggiose per implementazione algoritmica

- Somma di convoluzione vantaggiosa per combinazioni di modelli e previsioni (principio di sovrapposizione) e per diverse operazioni di analisi a tavolino

Calcolo della risposta ad un dato ingresso mediante somma di convoluzione

Esempio

y(k) = 0.1 u(k) +0.9 y(k-1)

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k = -1, -2, -3, \dots \\ (-1)^k & K = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-i)$$

quando k – 1 < 0 u(k - i) = 0

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(i)u(k-i)$$

e si può verificare che:

$h(k) = 0.1\ (0.9)^k$ e $u(k - i) = (-1)^{k-i} = (-1)^k\ (-1)^{-i}$ k = 0, 1, 2, …

$$\begin{aligned} y(k) &= (-1)^k \sum_{i=0}^{k} 0.1(0.9)^i (-1)^i \\ &= 0.1(-1)^k \sum_{i=0}^{k} (-0.9)^i \\ &= 0.1(-1)^k \left[\frac{1-(-0.9)^{k+1}}{1-(-0.9)}\right] \\ &= \left[\frac{1-(-0.9)^{k+1}}{19}\right](-1)^k \qquad k = 0,1,2,\dots \end{aligned}$$

- **Passo 1:** esprimere u(k-1) come il prodotto di una funzione di k per una funzione di i ($\alpha^{k-i} = \alpha^{k}\,\alpha^{-i}$)
- **Passo 2:** portare a fattor comune tutti i termini che non sono funzione dell'indice i (indice di sommatoria) e portarli fuori della sommatoria
- **Passo 3:** sfruttare al meglio le funzioni a cui converge la sommatoria (che spesso risulterà troncata); ad esempio

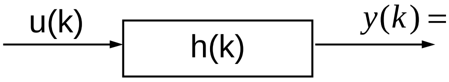
$$s = \sum_{i=0}^{k} \alpha^{i} = 1 + \alpha + \alpha^{2} + \ldots + \alpha^{k-1} + \alpha^{k}$$

$$\alpha s = \alpha + \alpha^{2} + \ldots + \alpha^{k+1}$$

$$s - \alpha s = 1 - \alpha^{k+1} = (1-\alpha)s$$

$$s = \frac{1-\alpha^{k+1}}{1-\alpha} \qquad \alpha \neq 1$$

CASO GENERALE



$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i u(k-i)$$

(Valida solo per condizioni iniziali tutte nulle prima della applicazione dell'ingresso)

PROBLEMA

Determinare i pesi a partire da una equazione alle differenze nel caso generale

Determinazione della sequenza dei pesi dalla risposta impulsiva

- La tecnica per calcolare la sequenza dei pesi h(i) vista nei precedenti esempi può divenire assai laboriosa per sistemi di ordine >1.
- Può essere più conveniente ricavare la sequenza dei pesi da una particolare risposta del sistema.
- Si usa a questo scopo come ingresso l'Impulso o Delta di Kronecher
- La risposta che si ottiene viene detta Risposta Impulsiva del sistemate e tale termine viene a volte anche usato per indicare la sequenza dei pesi.

- Dato

  $y(k) = b_0\, u(k) + b_1\, u(k\text{-}1) + \ldots + b_m\, u(k\text{-}m) - a_1\, y(k\text{-}1) - a_2\, y(k\text{-}2) - \ldots - a_n\, y(k\text{-}n)$

  ci proponiamo di ricavare gli h(i) tali che

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(\mathrm{i})\; u(k-i)$$

- Ponendo u(k) = δ(k), si ha

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(\mathrm{i})\; \delta(k-i)$$

- Da $\delta(k-i) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$

  si ottiene quindi y(k) = h(k)   k = 0, 1, 2, …

- Pertanto la risposta di un sistema ARX all'ingresso Delta di Kronecker con condizioni iniziali nulle [y(-1) = y(-2) = … = y(-n) = 0] è uguale alla sequenza dei pesi h(i) di tale sistema.

$$u(k) = \delta(k) \longrightarrow \boxed{\textbf{ARX}} \longrightarrow y(k) = h(k)$$

ESEMPIO

$$y(k) = u(k) + 2u(k-1) + \frac{1}{3}y(k-1)$$

$$y(-1) = 0\ , \quad u(k) = \delta(k)$$

$$y(k) = \begin{cases} 1 & per \quad k = 0 \\ 7\left(\dfrac{1}{3}\right)^k & per \quad k > 0 \end{cases}$$

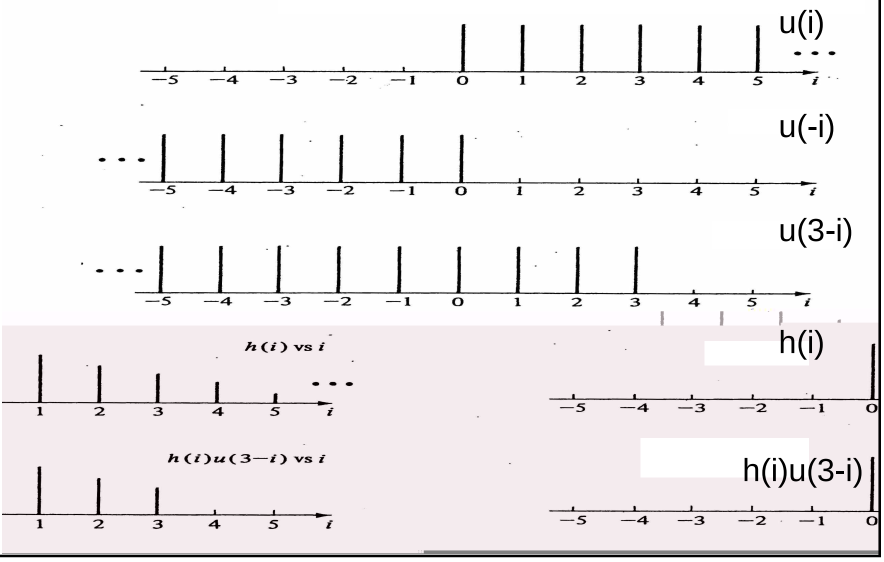
$$h(0) = 1$$

$$h(i) = 7\left(\frac{1}{3}\right)^{i}$$

Interpretazione grafica della somma di convoluzione

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \; u(k-i)$$

- ✓ k ad ogni passo è un intero fissato
- ✓ per semplicità u(i) ≡ gradino unitario



- L'interpretazione grafica può permettere una semplice realizzazione (implementabile con circuiti digitali tramite registri a scorrimento o sul calcolatore con un semplice algoritmo) con due regoli che scorrono uno sull'altro marcati a distanze uguali con valori interi.
  - Su uno si segnalano gli h(i) e sull'altro la sequenza speculare di u(i) (u(-i))

- Per calcolare y(k) si allinea h(0) con u(k).
  - Si calcolano i prodotti delle coppie allineate per i > 0 e si sommano.

➢ ESEMPIO: MODELLO DEL PIL

➢ $y(k) = c(k) + i(k) + u(k)$

- $u(k)$ = spesa governativa
- $c(k)$ = spesa dei consumatori = $\alpha\, y(k-1)$
  - ✓ α = propensione marginale ai consumi
    = costante positiva
- $i(k)$ = investimento privato indotto = $\beta\, [c(k) - c(k-1)]$
  - ✓ β = costante positiva
- $i(k) = \beta\, [\alpha\, y(k-1) - \alpha\, y(k-2)] = \alpha\, \beta\, [y(k-1) - y(k-2)]$

e quindi

$$y(k) = u(k) + \alpha\, (1 + \beta)\, y(k-1) - \alpha\, \beta\, y(k-2)$$

➢ ponendo ora $u(k) = \delta(k)$; $y(-1) = 0$, $y(-2) = 0$

- $k = 0$ $\quad y(0) = u(0) + \alpha\, (1 + \beta)\, y(-1) - \alpha\, \beta\, y(-2)$
  $= u(0) = 1$
- $k = 1$ $\quad y(1) = u(1) + \alpha\, (1 + \beta)\, y(0) - \alpha\, \beta\, y(-1)$
  $= u(1) + \alpha\, (1 + \beta) = \alpha\, (1 + \beta)$
- $k = 2$ $\quad y(2) = u(2) + \alpha\, (1 + \beta)\, y(1) - \alpha\, \beta\, y(0)$
  $= \varnothing + \alpha^2\, (1 + \beta)^2 - \alpha\, \beta$
- $k = 3$ $\quad y(3) = u(3) + \alpha\, (1 + \beta)\, y(2) - \alpha\, \beta\, y(1)$
  $= \varnothing + \alpha\, (1 + \beta)\, [\alpha^2\, (1 + \beta)^2 - \alpha\, \beta]$
  $- \alpha\, \beta\, [\alpha\, (1 + \beta)\,]$

$h(0) = 1$

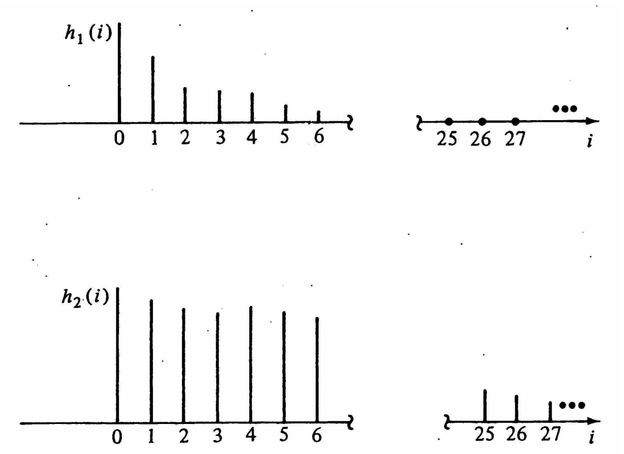
$h(1) = \alpha\, (1 + \beta)$

$h(2) = \alpha^2\, (1 + \beta)^2 - \alpha\, \beta$

$h(3) = \alpha^3\, (1 + \beta)^3 - 2\alpha^2\, \beta\, (1 + \beta)$

Memoria del sistema

- Dalla sequenza dei pesi possiamo dedurre quanto contribuiscano al valore attuale dell'uscita i valori passati dell'ingresso.
- In altri termini, questo misura la memoria del sistema.



- La memoria del sistema è tanto più corta quanto più velocemente la sequenza dei pesi della somma di convoluzione (ossia la risposta impulsiva) scende verso lo zero
- Più la memoria è corta e più la risposta ad uno stimolo è veloce
- Nel caso opposto il sistema oppone una forte e lunga resistenza al cambiamento che dovrebbe essere provocato dallo stimolo (sistema ad alta inerzia, nel caso meccanico), cioè il sistema ha un forte ritardo nella risposta

Esempio: Integratore Numerico

- Un metodo per approssimare numericamente l'integrale di una funzione u(t) agli istanti di campionamento kT è:

$$y_a(k) = T\,u(k) + y_a(k-1)$$

- La precedente espressione ha la stessa forma dell'equazione alle differenze relativa ad un sistema del primo ordine

$$y(k) = b_0\,u(k) + b_1\,u(k-1) - a_1\,y(k-1)$$

(ponendo $a_1 = -1$, $b_0 = T$, $b_1 = 0$)

la cui sequenza di pesi è

$$\begin{cases} h(0) = b_0 \\ h(i) = \{b_1 - a_1 b_0\}(-a_1)^{i-1}, \quad i = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

- Quindi:
  - sequenza di pesi: $h(i) = \begin{cases} 0 & i = -1,-2,-3,\ldots \\ T & i = 0,1,2,\ldots \end{cases}$
  - rappresentazione tramite somma di convoluzione:

$$y_a(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-i) = T\sum_{i=0}^{\infty} u(k-i)$$

- La memoria dell'integratore numerico è infinita
  - pesa tutti gli ingressi passati tramite la stessa costante moltiplicativa T

Esempio: Differenziatore Numerico

- Un metodo per approssimare numericamente la derivata di una funzione u(t) all'istante di campionamento kT è:

$$y_a(k) = \frac{1}{T}u(k) - \frac{1}{T}u(k-1)$$

- Questa relazione è già nella forma di una somma pesata di ingressi
  - sequenza dei pesi:

h(0) = 1/T

h(1) = -1/T

h(i) = 0 $i \neq 0{,}1$

$$h(i) = \frac{1}{T}\delta(i) - \frac{1}{T}\delta(i-1)$$

- La memoria del differenziatore numerico è piccola
  - un unico passo di memoria

STABILITA'

- La stabilità è una proprietà cruciale in ogni sistema fisico
- Essa, in **termini** grossolanamente **intuitivi**, significa due cose:
  - Il sistema lasciato a sé stesso a partire da una condizione iniziale vicina ad una condizione di equilibrio deve rimanere in prossimità di essa o avvicinarsi asintoticamente ad essa
  - Il sistema stimolato con un ingresso di ampiezza limitata deve fornire una risposta di ampiezza limitata

DEFINIZIONE

Una sequenza $\{u(k)\}$ si dice limitata se $\exists$ un numero $M \geq 0$ tale che $|u(k)| \leq M$ per ogni k

Esempio

• La sequenza gradino è limitata, M è qualunque numero ≥ 1

• La sequenza $u(k) = k$ al contrario non è limitata

DEFINIZIONE

Un sistema dinamico orientato, a tempo discreto, è detto stabile ingresso limitato/uscita limitata (BIBO) a partire da condizioni iniziali nulle se la sua uscita rimane limitata per qualunque sequenza limitata di ingresso

TEOREMA

Il sistema ARX Σ è stabile BIBO se e solo se nella rappresentazione mediante somma di convoluzione la sequenza dei pesi è sommabile, cioè:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |h(i)| \neq \infty$$

OSSERVAZIONE

La condizione di sommabilità espressa nel precedente teorema implica in particolare che gli elementi della sequenza dei pesi tendano a zero al crescere di i.

Traccia della dimostrazione (cond. suff.)

Sia $|u(k)| \leq M$ e si consideri l'uscita y(k): si ha

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-i)$$

$$|y(k)| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-i)\right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} |h(i)u(k-i)| = \sum_{i=0}^{\infty} |h(i)| \cdot |u(k-i)|$$

da cui, usando l'ipotesi di sommabilità di h(i) e di limitatezza di u(k), si ha la tesi.

Esempio

$$y(k) = \beta u(k) + \alpha y(k-1)$$

$$h(i) = \beta\alpha^i \quad i = 0,1,2,\ldots$$

$$\lim_{i\to\infty} h(i) = \lim_{i\to\infty} \beta\alpha^i = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ \infty & |\alpha| > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |h(i)| = \sum_{i=0}^{+\infty} \left|\beta\alpha^i\right|$$

Il sistema è stabile bibo se e solo se

$-1 < \alpha < 1$

PROPRIETA' DEI SISTEMI LINEARI ARX

LINEARITA'

Se un dato sistema lineare ARX risponde all'ingresso $u_1(k)$ con $y_1(k)$ e all'ingresso $u_2(k)$ con $y_2(k)$, allora la sua risposta all'ingresso

$$u(k) = a_1 u_1(k) + a_2 u_2(k)$$

con a_1, a_2 costanti arbitrarie è data da

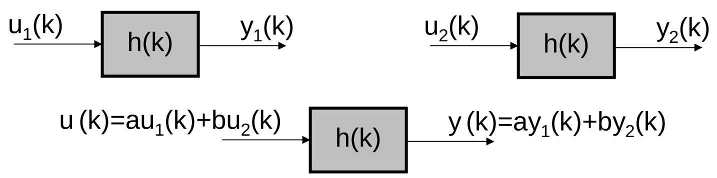
$$y(k) = a_1 y_1(k) + a_2 y_2(k)$$

PROPRIETA' DEI SISTEMI LINEARI ARX

La linearità determina il principio di sovrapposizione degli effetti

Sistema Lineare

con a,b costanti



PROPRIETA' DEI SISTEMI LINEARI ARX

STAZIONARIETA'

La stazionarietà nei sistemi lineari ARX è rappresentata dal fatto che i coefficienti

$a_1, \dots, a_{na}, \qquad b_0, \dots, b_{nb}$

nell'equazione alle differenze

$y(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_n\, y(k-na) + b_0 u(k) + \dots + b_{nb} u(k-nb)$

non dipendono dal tempo, cioè sono costanti indipendenti da k

PROPRIETA' DEI SISTEMI LINEARI ARX

Poiché y(k) può esprimersi anche come:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-i)$$

se il sistema è stazionario, applicando ad esso lo stesso ingresso fatto scorrere nel tempo di p passi, ossia

$$u^*(k) = u(k-p)$$

si constata che

$$y^*(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u^*(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-p-i)$$

cioè che

$$y^*(k) = y(k-p)$$

Le proprietà di linearità e stazionarietà giustificano la denominazione di ingressi canonici dati ad alcune classi di segnali di test.
Questi sono

- Segnali che opportunamente combinati fra quelli della stessa classe danno luogo ad un segnale risultante di forma qualunque

- Almeno un segnale appartenente alla classe produca come uscita la sequenza dei pesi del sistema o una funzione da cui questa sequenza di pesi può essere immediatamente ricavata.

Tramite l'applicazione di segnali canonici si può quindi prevedere il comportamento del sistema in risposta ad un ingresso qualunque.

Inoltre parametri caratteristici della risposta a segnali canonici possono costituire una misura convenzionale delle prestazioni del sistema

Sono proprio queste considerazioni che hanno guidato nella definizione di criteri operativi di analisi di sistemi TD lineari e stazionari.

I segnali usati come segnali canonici sono:

- l'implulso o delta di Kroneker, la risposta al quale è esattamente h(k)
- Il gradino unitario $u(k) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k < 0 \\ 1 & \text{se} \quad k \geq 0 \end{cases}$

  la risposta al quale è $y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(i)$

- I polinomi fattoriali canonici $u(k) = \frac{h^{(k)}}{k!}$

RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO

E' utile notare che la risposta al gradino unitario gode della proprietà

$$y(k)-y(k-1) = y(k) \qquad k=0,1,2, \dots$$

$$y(-1) = 0$$

Per tutti i sistemi che contengono elementi dissipativi (che tengono conto di attriti e, in generale, trasformazioni di energia con rendimento <1) ossia per tutti i sistemi che rappresentano dispositivi fisici è in generale vero che

$$h(k)>0 \qquad \forall k$$

$$h(k) \to 0 \qquad k \to \infty$$

Può accadere che gli h(k) tendano a 0 in modo non monotono. Ciò determina un andamento pseudo oscillatorio (smorzato).

Se invece tendono a zero in modo monotono è evidente che y(k) tende ad un valore costante, in modo monotono anch'essa.

Il sistema manifesta un comportamento instabile se non è verificata la condizione $h(k) \to 0$ se $k \to \infty$.

La risposta al gradino permette di dare una definizione formale e quantitativa di alcune prestazioni desiderate dai sistemi di controllo.

Nel caso di risposta forzata, cioè ottenuta sotto l'applicazione di un ingresso che si prolunga nel tempo, ci si aspetta che un sistema generi una risposta che, almeno asintoticamennte, tenda a seguire l'andamento dell'ingresso in modo proporzionale.

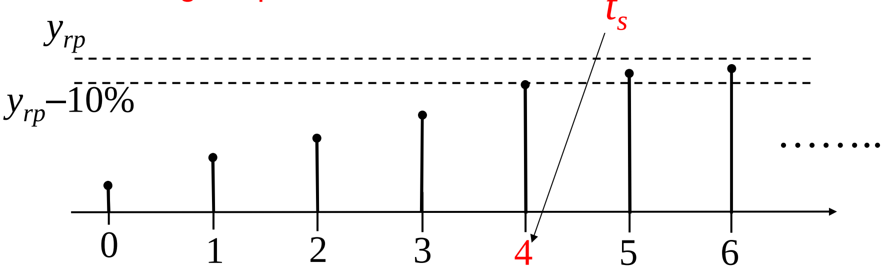
Questo è un aspetto cruciale nei sistemi di controllo il cui comportamento desiderato è in genere proporzionale all'ingresso.

La misura di quanto bene questa caratteristica è soddisfatta è denominata fedeltà di risposta.

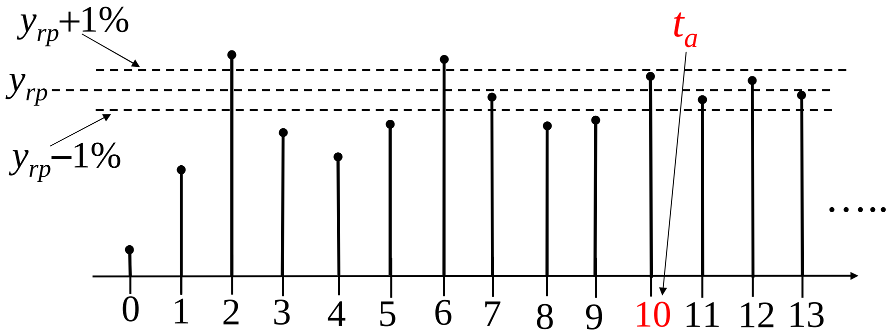
E' intuitivamente comprensibile che un sistema di controllo avrà prestazioni tanto migliori quanto più velocemente l'uscita diventerà permanentemente proporzionale all'ingresso entro prescritte tolleranze.

•Nella risposta a gradino si possono individuare dei parametri che costituiscono una misura grossolana ma efficace di quanto velocemente la risposta forzata arrivi ad essere proporzionale all'ingresso, entro prescritte tolleranze:

•Tempo di salita (t_s): è il numero di passi necessari perché la risposta al gradino raggiunga il 90% del valore cui tende asintoticamente. Se quest'ultimo valore esiste, viene detto valore di regime permanente.



•Tempo di assestamento (t_a) all'x%: è il numero di passi richiesti affinché la risposta al gradino si situi definitivamente entro una fascia di tolleranza pari all'x% del valore di regime permanente. Frequentemente tale fascia di tolleranza è assegnata al $\pm 1\%$.



OSSERVAZIONI

•Il sistema, nel caso di risposta a gradino unitaria, raggiunge il valore di regime permanente quando $h(k)$ va a zero.

•Quindi, ci va tanto più velocemente, quanto più velocemente $h(k)$ va a zero.

SISTEMI INTERCONNESSI

•Nei problemi di automatica (di controllo automatico), si ha in generale a che fare con sistemi interconnessi.

•Le strutture fondamentali di interconnessione sono:

- ✓in serie;
- ✓in parallelo;
- ✓in controreazione.

•Se si interconnettono sistemi lineari e stazionari, con tali strutture di interconnessione si ottengono sistemi lineari e stazionari.

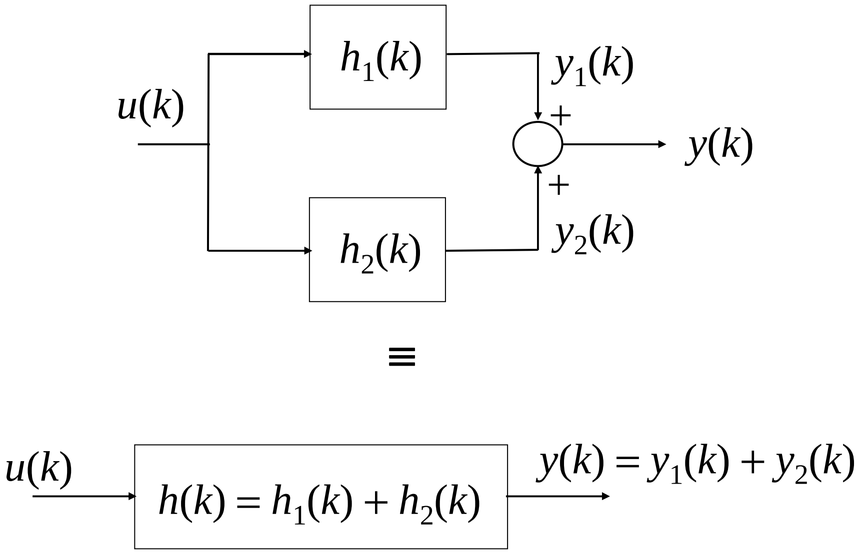
•Quindi saranno essi stessi modellati da una serie di coefficienti che entrano nel relativo modello con somma di convoluzione:

$$y(k)=\sum_{i=0}^{+\infty}h(i)u(k-i)$$

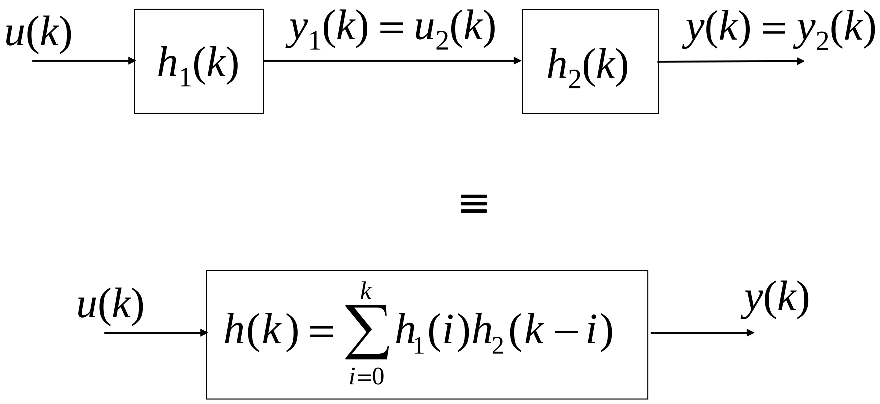
•È utile comprendere allora come la sequenza di pesi del sistema interconnesso sia legata alle sequenze dei pesi dei sistemi componenti.

•Si hanno i seguenti risultati:

CONNESSIONE IN PARALLELO



CONNESSIONE IN SERIE O IN CASCATA



•Infatti, usando ancora come ingresso $u(k) = \delta(k)$ (risposta impulsiva), si ha:

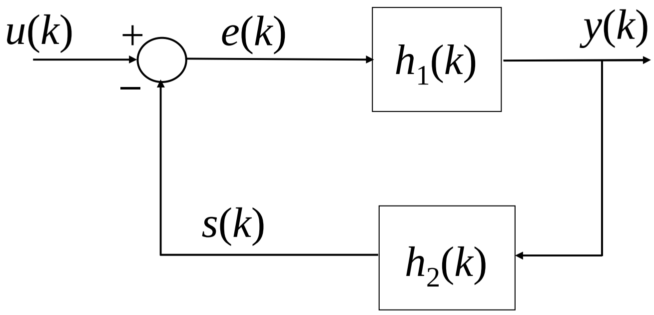
$y_1(k) = h_1(k)$ e, poiché $u_2(k) = y_1(k)$, si ottiene:

$$y_2(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} h_2(i) u_2(k-i) = \sum_{i=0}^{k} h_2(i) h_1(k-i)$$

perché $h_2(i)$ è nulla per $i < 0$.

•Invertendo la sequenza di sistemi connessi in cascata, il risultato non cambia (per effetto della stazionarietà).

CONNESSIONE IN CONTROREAZIONE



$$s(k) = \sum_{i=1}^{+\infty} h_2(i) y(k-i)$$
$$e(k) = u(k) - s(k)$$
$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} h_1(i) e(k-i)$$

•$h_2(k)$ deve pesare solo i campioni precedenti di $y(k)$, e non anche quello attuale (oppure $h_1(0) = 0$).

•Questa è una condizione necessaria perché il sistema a controreazione sia fisicamente implementabile.

•Il fatto è che, se così non fosse, per calcolare un qualunque valore all'istante k di una grandezza nell'anello, dovremmo già conoscere il valore di quella stessa grandezza all'istante k.

•Per poter studiare compiutamente la configurazione a controreazione, abbiamo bisogno del modello costituito dalle funzioni di trasferimento, per cui occorre lo strumento costituito dalla trasformata z e dalla sua antitrasformata.

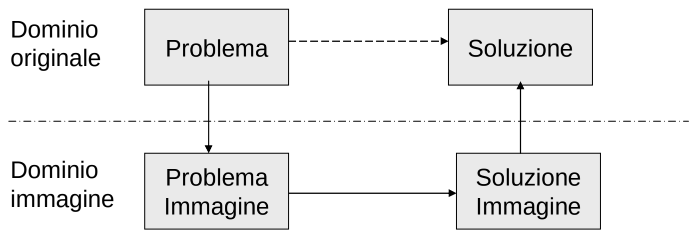
INTRODUZIONE

- Modalità di rappresentazione dei sistemi TD viste (equazioni alle differenze, somma di convoluzione con risposta impulsiva) non particolarmente efficaci per gli scopi di uso dei modelli matematici nell'automatica

- Mancanza di strumenti compatti e sistematici per lo studio di modelli di sistemi di ordine anche modesto (≥2)

- Strumenti matematici adatti: tecniche di trasformazione, ovvero tecniche con cui si cambia il dominio di definizione dei segnali di interesse e delle relazioni funzionali tra essi.

- Si trasforma il problema originale (previsione del comportamento di un sistema lineare stazionario TD in termini di risposta ad uno stimolo a partire da condizioni iniziali note) in un problema immagine definito su un dominio diverso dal tempo
- Si cerca la soluzione del problema immagine nel dominio immagine
- Si trasforma la soluzione trovata nel dominio immagine nella corrispondente soluzione nel dominio di partenza



La scelta di un tale percorso ha senso solo se risulta vantaggiosa dai seguenti punti di vista:

1. Semplicità di calcolo della soluzione immagine originale e del passaggio da essa alla soluzione del problema

2. Possibilità di riconoscere facilmente e direttamente caratteristiche e proprietà del problema e delle soluzioni nel dominio immagine

La trasformata Z gode di ambedue le proprietà:

- Soluzione ricavabile da semplici operazioni algebriche
- Identificazione rapida di proprietà del sistema in studio

RICHIAMI SUI NUMERI COMPLESSI

Un numero complesso z è un numero che può essere espresso nella forma

$$z = x+jy$$

Dove $x, y \in \Re$ $j = \sqrt{-1}$

x = Re(z) = parte reale di z

y = Im(z) = parte immaginaria di z

Due numeri complessi sono uguali quando hanno rispettivamente uguali le loro parti reali ed immaginarie

OPERAZIONI ELEMENTARI CON NUMERI COMPLESSI

Dati i numeri complessi

$z_1 = x_1 + jy_1$ $z_2 = x_2 + jy_2$

- **SOMMA**

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

- **PRODOTTO**

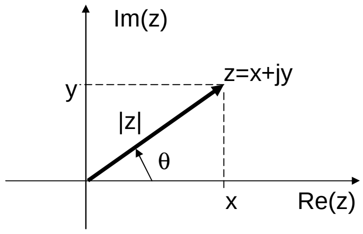
$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

- **INVERSO**

$$z_1^{-1} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - j\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA

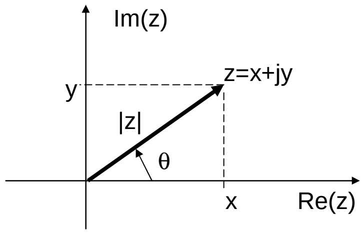
si associa il numero complesso z = x+jy con il punto (x,y) del piano complesso di ascissa Re(z) e ordinata Im(z)



- Ad ogni numero complesso z = x+jy è associato un punto del piano complesso
- Ad ogni numero complesso z = x+jy è associato un vettore che va dall'origine fino al punto (x,y) con
  - ampiezza (modulo) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - angolo (fase) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

IDENTITA' DI EULERO

Dalla rappresentazione geometrica dei numeri complessi



si deducono le seguenti relazioni tra: parte reale x, parte immaginaria y del numero complesso e modulo |z| e fase θ del vettore che ne resta individuato:

$x = |z| \cos\theta$, $y = |z| \sin\theta$

da cui $z = |z| \{\cos\theta + j \sin\theta\}$

per il termine $\cos\theta + j\sin\theta$ vale la relazione, nota come identità di Eulero,

$\mathbf{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta}$

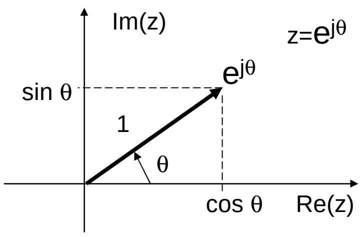
RAPPRESENTAZIONE POLARE

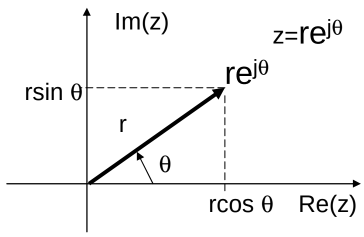
Usando l'identità di Eulero è possibile dare una nuova rappresentazione dei numeri complessi,

considerando che:

- $e^{j\theta}$=vettore di lunghezza unitaria e fase θ

$z=|z|\, e^{j\theta}=r\, e^{j\theta}$= rappresentazione polare





E' preferibile usare la rappresentazione polare dei numeri complessi quando si devono effettuare operazioni di prodotto e divisione di numeri complessi

ESEMPIO

dati due numeri complessi

$$z_1= |z_1|\{\cos\theta_1+j\sin\theta_1\} = |z_1|e^{j\theta_1}$$

$$z_2= |z_2|\{\cos\theta_2+j\sin\theta_2\} = |z_2|e^{j\theta_2}$$

si può facilmente dimostrare che

$$z_1z_2 = |z_1||z_2|\, e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_1/z_2 = (|z_1|/|z_2|)\, e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

PRINCIPALI FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

Una funzione di variabile complessa, indicata con F(z), è una funzione definita nell'insieme dei numeri complessi a valori in quello stesso insieme.

FUNZIONE COMPLESSO CONIUGATO

dato il numero complesso : $z = x+jy = |z|e^{j\theta}$

si definisce valore complesso coniugato di z il valore

$$\mathbf{z^*} = F(z) := \mathrm{Re}(z) - j\,\mathrm{Im}(z) = x - jy$$

PROPRIETA'

$$z = x+jy\,, \qquad z^* = x-jy$$

$$|z| = \sqrt{(z)(z^*)}$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+z^*)$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2j}(z-z^*)$$

FUNZIONE ESPONENZIALE COMPLESSO

dato il numero complesso : $z = x+jy$

si definisce esponenziale complesso di z il valore

$$\mathbf{e^z} = F(z) := e^x e^{jy}$$

Trasformata Z (0)

I segnali con i quali abbiamo a che fare nel trattare i sistemi ARX si rappresentano come sequenze di valori reali del tipo f(t), t $\in$ *Z*.

Nei casi di interesse, f(t) è nulla per $t \leq t_0$ (molto spesso $t_0 = 0$).

Per indicare questa caratteristica, diremo che f(t) è una sequenza *finita a destra*.

Trasformata Z (1)

Definizione 1

Data una sequenza f(t) finita a destra, si chiama trasformata Z di f(t), e si indica con Z[f(t)], la serie di potenze in z^{-1} data da

$$Z[f(t)] = \sum_{t=0}^{+\infty} f(t)z^{-t} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \ldots\ldots$$

Osservazione 1

Interpretando z come una variabile complessa, Z[f(t)] viene vista come una serie di potenze nel campo complesso **C**.

Trasformata Z (2)

Osservazione 2

Se la serie

$$Z[f(t)] = \sum_{t=0}^{+\infty} f(t)z^{-t} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \ldots\ldots$$

risulta essere convergente in una regione S del piano complesso **C**, la sua somma è una funzione di variabile complessa definita in S che viene indicata con F(z).

Con un certo abuso di notazione, si può porre F(z) = Z[f(t)] e si può dire che F(z) è la trasformata Z di f(t).

Trasformata Z (3)

Esempio 1

Consideriamo la sequenza f(t) finita a destra data da

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t < 0 \\ a^t & \text{per} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

La sua trasformata Z è data dalla serie

$$Z[f(t)] = \sum_{t=0}^{+\infty} a^t z^{-t} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \ldots\ldots$$

Trasformata Z (4)

Ricordando, dallo studio della serie geometrica, che per $az^{-1} \neq 1$ si ha

$$\sum_{t=0}^{n} a^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{n} (az^{-1})^t =$$

$$= 1 + az^{-1} + (az^{-1})^2 + \ldots\ldots + (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^{n+1}}{1-az^{-1}}$$

si ottiene per $|az^{-1}|<1$, cioè per $|z|>|a|$,

$$Z[f(t)] = F(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} a^t z^{-t} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-(az^{-1})^{n+1}}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Trasformata Z (5)

In altri termini, possiamo affermare che la serie ottenuta trasformando la sequenza considerata è convergente per $|z|>|a$. Quindi, con le convenzioni stabilite in precedenza abbiamo che la trasformata

Z della sequenza $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ a^t & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$ è la

Funzione $F(z) = \dfrac{z}{z-a}$ ristretta alla regione $S \subseteq \mathbf{C}$

definita da $S = \{z \in \mathbf{C},\ |z|>|a|\}$.

Trasformata Z (6)

Esempio 2

Consideriamo la sequenza δ(t), cioè l'impulso o delta di Dirac, data da

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad t = 0 \\ 0 & \text{per} \quad t \neq 0 \end{cases}$$

La sua trasformata Z è data dalla serie

$$Z[f(t)] = \sum_{t=0}^{+\infty} \delta(t) z^{-t} = 1$$

Trasformata Z (7)

Non vi sono, in questo caso, problemi di convergenza, poiché la sommatoria consta di un solo termine indipendente da z. Possiamo, in altri termini, affermare che la serie ottenuta trasformando la sequenza δ(t) è convergente per qualunque $z \in$ **C**.

Quindi, con le convenzioni stabilite in precedenza abbiamo che la trasformata Z di δ(t) è la funzione F(z) = 1, definita su tutto il piano complesso **C.**

Trasformata Z (8)

Proprietà delle serie di potenze garantiscono che se la serie

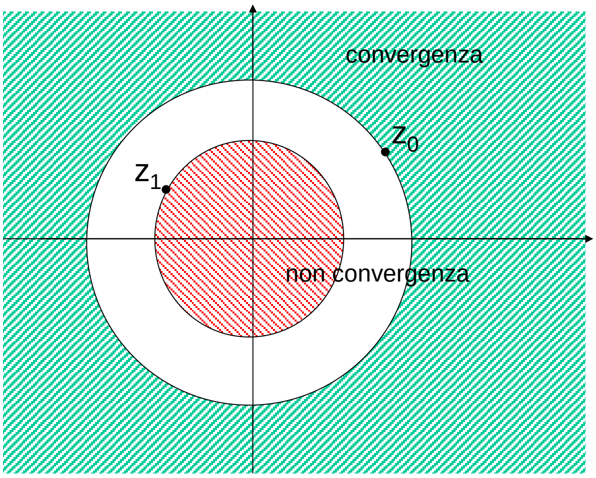
$$Z[f(t)] = \sum_{t=0}^{+\infty} f(t) z^{-t}$$

ottenuta Z-trasformando la sequenza f(t)

- converge per qualche valore $z_0 \in \mathbf{C}$, allora converge per ogni $z \in \mathbf{C}$ con $|z|>|z_0|$

- non converge per qualche valore $z_1 \in \mathbf{C}$, allora non converge per ogni $z \in \mathbf{C}$ con $|z|<|z_1|$.

Trasformata Z (9)



Trasformata Z (10)

Da quanto affermato segue

Proposizione 1

Se la serie

$$Z[f(t)] = \sum_{t=0}^{+\infty} f(t) z^{-t}$$

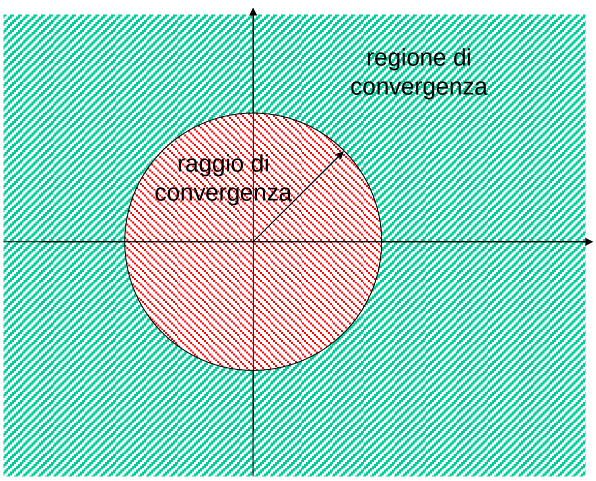
ottenuta Z-trasformando la sequenza f(t) converge per qualche valore $z_0 \in \mathbf{C}$, allora esiste un numero reale $r \geq 0$ tale che la serie converge ogni per $z \in \mathbf{C}$ con $|z|>r$ e non converge per ogni ogni $z \in \mathbf{C}$ con $|z|<r$.

Definizione 2

Il numero r descritto dalla proposizione precedente si dice raggio di convergenza della serie.

La regione $S \subseteq \mathbf{C}$ definita da $S = \{z \in \mathbf{C}, |z|>r\}$ si dice regione di convergenza della serie

Trasformata Z (11)



Trasformata Z (12)

Esempio 3

Consideriamo la sequenza f(t) finita a destra data da

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t < 0 \\ a^t & \text{per} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

La sua trasformata Z è data da $\boxed{F(z) = \frac{z}{z-a}}$ con

raggio di convergenza r = a (si veda Esempio 1).

Trasformata Z (13)

Esempio 4

Consideriamo la sequenza δ(t), cioè l'impulso o delta di Dirac, data da

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad t = 0 \\ 0 & \text{per} \quad t \neq 0 \end{cases}$$

La sua trasformata Z è data da $Z[f(t)] = 1$ con

raggio di convergenza r = 0 (si veda Esempio 2).

Trasformata Z (14)

Eseguire la trasformata Z di una sequenza f(t) finita a destra significa calcolare in termini espliciti la funzione F(z), somma della serie Z[f(t)] (supposta convergente per qualche z ∈ **C**) e determinarne al contempo il raggio di convergenza.

Esempio 5 Trasformata del gradino

Consideriamo la sequenza f(t) data da $f(t)=\begin{cases}0 & \text{per } t<0\\ 1 & \text{per } t\geq 0\end{cases}$

(gradino di ampiezza 1). Possiamo considerare questa situazione come un caso particolare di quella vista nell'Esempio 1, con a = 1 (si verifichi quanto affermato). Quindi, la trasformata Z della sequenza considerata è data da

$$\boxed{F(z)=\frac{z}{z-1}}$$

Con raggio di convergenza r = 1.

Trasformata Z (15)

Esempio 6 Trasformata della rampa

Consideriamo la sequenza f(t) data da $f(t)=\begin{cases}0 & \text{per } t<0\\ t & \text{per } t\geq 0\end{cases}$

Otteniamo $Z[f(t)]=\sum_{t=0}^{+\infty} tz^{-t}$ e osservando che

$$(z-1)^2\sum_{t=0}^{+\infty} tz^{-t} = z+2+3z^{-1}+4z^{-2}+5z^{-3}+\ldots$$
$$-2-4z^{-1}-6z^{-2}-8z^{-3}+\ldots$$
$$+z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\ldots$$

si ha infine

$$\boxed{F(z)=\frac{z}{z-1}}$$

ZERI E POLI DELLA TRASFORMATA Z

•Si è visto che la trasformata z di una sequenza geometrica è esprimibile come il rapporto di due polinomi nella variabile z. Nel seguito considereremo solo situazioni dello stesso tipo, nelle quali, cioè, la trasformata z è una funzione razionale.

•Si consideri quindi:

$$F(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}$$

•I polinomi a numeratore e a denominatore, se di essi si conoscono le radici, possono essere scritti in forma fattorizzata:

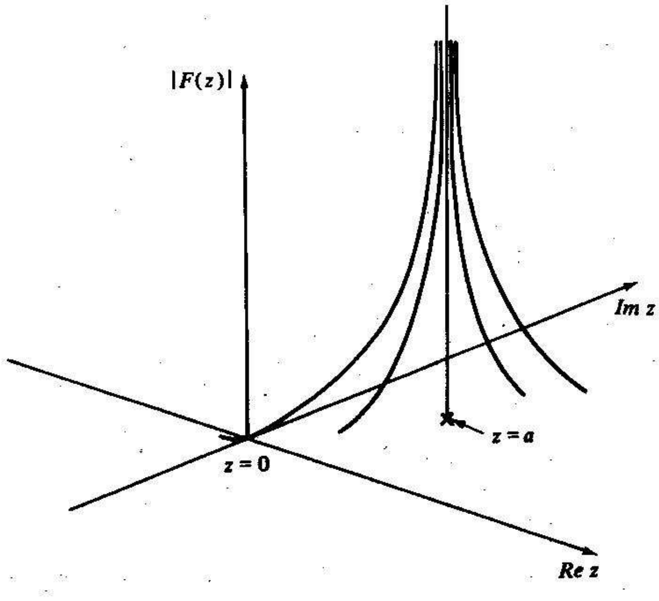
$$F(z) = \frac{b_0 (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n)}$$

•Per $z = z_1$, $z = z_2$, …, $z = z_m$, si ha: $F(z)=0$. Le radici del numeratore $z_1, z_2, \ldots, z_m$ si dicono zeri di $F(z)$.

•Per $z = p_1$, $z = p_2$, …, $z = p_n$, $F(z)$ non è definita. Le radici del denominatore $p_1, p_2, \ldots, p_n$ si dicono poli di $F(z)$.

•Esempio:

$$F(z) = \frac{z}{(z - a)}$$

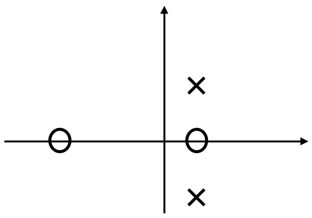


•I poli e gli zeri di una trasformata z contengono tutta l'informazione essenziale relativa ad $F(z)$.

• Quindi la loro posizione nel piano z ha un ruolo importante nell'analisi della $F(z)$.

•Esempio: $F(z) = \dfrac{z^2 + 2z - 3}{z^3 - 2z^2 + 5z} = \dfrac{(z-1)(z+3)}{z(z-1-2j)(z-1+2j)}$

Indicando i poli con '**X**' e gli zeri con '**O**', si ha:



•È utile avere tabelle di coppie:

sequenze generatrici ↔ trasformate z

in particolare per sequenze ottenute dal campionamento di segnali continui.

TABELLA TRASFORMATE Z

f(k)	F(z)	Raggio di convergenza
$\delta(k)$	1	0
1	$\frac{z}{z-1}$	1
a^k	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert a \rvert$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$	1
$\frac{k^{(h)}}{h!}$	$\frac{z}{(z-1)^{h+1}}$	1

Ulteriori trasformate z

	$f(k)$ for $k \geq 0$	$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$	Raggio di convergenza *R*
1	1	$\frac{z}{z-1}$	1
2	a^k	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert a \rvert$
3	k	$\frac{z}{(z-1)^2}$	1
4	k^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	1
5	k^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	1
6	$\frac{a^k}{k!}$	$e^{a/z}$	0
7	$\sin k\omega T$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	1
8	$\cos k\omega T$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	1
9	$a^k \sin k\omega T$	$\frac{az \sin \omega T}{z^2 - 2az \cos \omega T + a^2}$	$\lvert a \rvert$
10	$a^k \cos k\omega T$	$\frac{z(z - a \cos \omega T)}{z^2 - 2az \cos \omega T + a^2}$	$\lvert a \rvert$
11	ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert a \rvert$
12	$k^2 a^k$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$\lvert a \rvert$
13	$k^3 a^k$	$\frac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$	$\lvert a \rvert$
14	$\delta(k)$	1	0
15	$\delta(k-m)$	z^{-m}	0

PROPRIETÀ DELLA Z TRASFORMATA

Linearità

f(k) = af1(k) + b f2(k)   k = 0, 1, 2, …

a, b costanti

$$F(z) = a\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k)z^{-k} + b\sum_{k=0}^{\infty} f_2(k)z^{-k} \qquad |z| > \max(R_1, R_2)$$

$$= aF_1(z) + bF_2(z) \qquad |z| > \max(R_1, R_2)$$

NB

- È molto utile per trovare tramite opportune manipolazioni la Z-trasformata di una data sequenza;
  - Le opportune manipolazioni consistono nella decomposizione di una sequenza complessa in sequenze più semplici, le cui Z-trasformate sono note

Scorrimento a destra

- Sia il segnale f(k) identicamente nullo per k<0
- Sia esso applicato ad un sistema composto di m ritardi unitari in cascata. La risposta del sistema è:

$$y(k) = f(k-m) \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-m)z^{-k}$$

$$= z^{-m}\left[f(0)+f(1)z^{-1} + \ldots + f(n)z^{-1} + \ldots\right]$$

$$= z^{-m}F(z) \qquad |z| > R$$

ossia

$$Z\,[f(k-m)] = z^{-m}F(z), \quad |z|>R$$

m qualunque intero ≥0

NB: la proprietà vale solo per f(k) identicamente nulla per k<0

- Ne seguono importanti vantaggi per analizzare sistemi lineari a tempo discreto

PE

$$y(k) = \beta u(k) + \alpha y(k-1) \quad k = 0,1,2,....$$
$$Z[y(k)] = \beta Z[u(k)] + \alpha Z[y(k-1)]$$
$$Y(z) = \beta u(z) + \alpha z^{-1} Y(z)$$

$$Y(z) = \left(\frac{\beta}{1-\alpha z^{-1}}\right) U(z) = \left(\frac{\beta z}{z-a}\right) U(z)$$

Assunzione implicita $y(\text{-}1) = 0$

$\left(\frac{\beta z}{z-\alpha}\right)$ rappresenta il modo in cui l'ingresso u(z) si trasferisce in uscita.

- Rappresenta quindi la cosiddetta **Funzione di Trasferimento** del sistema.
  - Una volta che essa sia nota permette di calcolare la risposta ad una qualunque sequenza di ingresso, di cui si possa definire la trasformata z.

PE

Nel nostro caso se il segnale di ingresso è il gradino unitario campionato si ha:

$$u(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = \left(\frac{\beta z}{z-\alpha}\right)\frac{z}{z-1} = \frac{\beta z^2}{(z-\alpha)(z-1)}$$

A questo punto se siamo capaci di trovare la sequenza y(k) corrispondente ad Y(z) abbiamo **risolto il problema del calcolo della risposta**.

Proprietà di convoluzione

- Sappiamo che

  y(k) = h(0)u(k) + h(1)u(k-1) + h(2) u(k-2) + …

  dove h(i) è la sequenza dei pesi caratteristica del sistema.

- Nel caso che tutte le sequenze considerate siano identicamente nulle per k<0

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \{h(0)u(k) + h(1)u(k-1) + \ldots\}z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(0)u(k)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} h(1)u(k-1)z^{-k} + \ldots$$

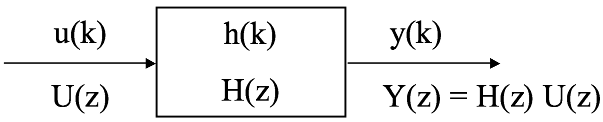
$$= h(0)\sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} + h(1)\sum_{k=0}^{\infty} u(k-1)z^{-k} + \ldots$$

Poichè

$Z[u(k-m)] = z^{-m}U(z)$ $\quad$ $m \geq 0$ e sequenze $u(k)$ identicamente per $k<0$

$$Y(z) = h(0)u(z) + h(1)z^{-1}U(z) + h(2)z^{-2}\,U(z) + \ldots$$
$$= \{h(0) + h(1)z^{-1} + \ldots\}\,U(z)$$
$$= H(z)U(z)$$

con $H(z) = Z[h(z)]$



Esempi importanti di tale proprietà si hanno per:

- **Risposta al delta di Kronecker**

  $$u(k) = \delta(k) \Rightarrow U(z) = 1 \Rightarrow Y(z) = H(z)$$

- **Risposta al gradino unitario**

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

$$Y(z) = H(z)\frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

$$= H(z)\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = H(z)$$
$$y(k) - y(k-1) = h(k)$$

Esempio

Sia ancora

$$y(k) = \beta\, u(k) + \alpha\, y(k\text{-}1)$$

$$h(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \beta\alpha^k & k \geq 0 \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{\beta z}{z - \alpha} \qquad |z| > |\alpha|$$

Se $u(z) = \dfrac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$

dalla proprietà di convoluzione segue

$$Y(z) = H(z)U(z) = \left(\frac{\beta z}{z-\alpha}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

che è lo stesso risultato di prima trovato per altra via

ALTRE PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA Z

Scorrimento a sinistra

Sia f(k) una sequenza data

Sia $g(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ f(k+1) & k \geq 0 \end{cases}$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1) z^{-k}$$

$$= f(1)z^{-0} + f(2)z^{-1} + \ldots$$

$$z^{-1}G(z) = f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \ldots$$

$$z^{-1}G(z) + f(0) = F(z) \qquad |z| > R$$

$$G(z) = Z[f(k+1)]$$

$$Z[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)$$

ed in generale

$$Z[f(k+m)] = z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k} \qquad |z| > R$$

Proprietà di somma finita

Sia $g(k) = \sum_{i=0}^{k} f(i) \qquad k = 0,1,2,...$

$$g(k) - g(k-1) = f(k) \qquad k > 0$$

$$g(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{g}(0) = f(0)$$

$$F(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \qquad |z| > R$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [g(k) - g(k-1)] z^{-k}$$

$$= G(z) - z^{-1} G(z)$$

$$F(z) = G(z)(1 - z^{-1}) = G(z)(1 - \frac{1}{z})$$

$$= G(z) \frac{z-1}{z}, \qquad |z| > \max(1, R)$$

$$G(z) = \frac{z}{z-1} F(z), \qquad |z| > \max(1, R)$$

Moltiplicazione per α^K

Sia $g(k) = \alpha^k f(k) \qquad k \geq 0$

$$Z[f(k)] = F(z) \qquad |z| > R$$

$$Z[g(k)] = Z[\alpha^k f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k f(k) z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) [\alpha^{-1} z]^{-k}$$

$$= F(\alpha^{-1} z) \qquad |\alpha^{-1} z| > R$$

$$Z[\alpha^k f(k)] = F(\alpha^{-1} z), \qquad |z| > |\alpha| R$$

Teorema del valore iniziale

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2}$$

$$f(0) = \lim_{|z| \to \infty} F(z)$$

Teorema del valore finale

- Determinare il comportamento di f(k) per $k \to \infty$
    - Se F(z) ha poli fuori del cerchio unitario verificheremo che f(k) per $k \to \infty$ è illimitato
    - Ci limitiamo a considerare il caso che (z-1)F(z) è analitica per $|z| \geq 1$ (ossia non ha poli nella regione di convergenza)
- Sotto questa ipotesi

$$g(k) = f(k+1) - f(k)$$

$$G(z) = Z[f(k+1) - f(k)] = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k+1) - f(k)] z^{-k}$$

- Usando lo scorrimento a sinistra

$$zF(z) - zf(0) - F(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k-1) - f(k)] z^{-k}$$

per $z \to 1$

$$\lim_{z\to 1} [(z-1)F(z) - zf(0)] = \lim_{z\to 1} [\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k+1) - f(k)] z^{-k}]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k+1) - f(k)]$$

$$= f(\infty) - f(0)$$

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)F(z) \qquad per \quad f(0) = 0$$

Sequenze periodiche

- f(k)=f(k+N)

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) z^{-k}$$

$$F(z) = \left(\frac{z^N}{z^N - 1} \right) F_1(z) \qquad |z| > 1$$

$$|z^{-N}| < 1$$

INTRODUZIONE

- Per rendere efficace il passaggio dal problema originale al problema immagine occorre vedere come attuare il passaggio dalla soluzione immagine alla soluzione del problema originale.
- Vedere come si realizza la trasformata Z inversa ed imparare ad eseguirla

PROBLEMA : Data F(z) determinare f(k)

$$\mathbf{f(k) = Z^{-1}[F(z)]}$$

Metodi disponibili:

- Espansione frazioni parziali
- Divisione diretta tra polinomi

ESPANSIONE IN FRAZIONI PARZIALI

- E' il metodo più semplice da usare quando la Z-trasformata è scritta in modo da mettere in esplicita evidenza le radici dei polinomi in z che compongono la funzione F(z).
- Nel caso contrario è necessario calcolare preliminarmente tali radici

NOTA

Possono generarsi complicazioni analitiche superabili con tecniche grafo-numeriche o con soluzioni numeriche, tipo Newton-Raphson che sono oggi parte integrante di numerose librerie matematiche anche implementate su PC

L'approccio con espansione di frazioni parziali sarà introdotto facendo riferimento ad un semplice esempio.

ESEMPIO

Sia dato il sistema descritto dall'equazione alle differenze del primo ordine

$$y(k) = \beta u(k)+\alpha y(k-1)$$

La cui risposta ad un gradino unitario risulta essere

$$Y(z) = \frac{\beta \cdot z^2}{(z-\alpha)(z-1)}$$

Si può pensare di decomporre Y(z) in una somma di termini, ciascuno dotato di sequenze generatrici note

$$Y(z) = \frac{\beta \cdot z^2}{(z-\alpha)(z-1)} = A + B\frac{z}{z-\alpha} + C\frac{z}{z-1}$$

Dove

$$1 \quad \leftrightarrow \quad \delta(k)$$

$$z/(z-\alpha) \quad \leftrightarrow \quad \alpha^k, \qquad k=0,1,2,\ldots.$$

Si tratta allora di calcolare i valori di A, B, C.

Una volta calcolati tali valori è evidente, per la linearità del sistema, che

$$y(k) = A\delta(k) + B\alpha^k + C(1)^k, \qquad k = 0,1,2,....$$

Le procedure per il calcolo di A, B, C possono essere di tre tipi.

Ciascuna porterà allo stesso risultato ovvero:

$$A = 0, \quad B = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha}, \quad C = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

PROCEDURA 1

$$Y(z) = \frac{\beta \cdot z^2}{(z-\alpha)(z-1)} = A + B\frac{z}{z-\alpha} + C\frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{A(z-\alpha)(z-1) + B(z-1)z + C(z-\alpha)z}{(z-\alpha)(z-1)} =$$

$$= \frac{Az^2 - Az - A\alpha z + A\alpha + Bz^2 - Bz + Cz^2 - C\alpha z}{(z-\alpha)(z-1)} =$$

$$= \frac{z^2(A+B+C) + z(-A\alpha - C\alpha - B - A) + A\alpha}{(z-\alpha)(z-1)} =$$

Da tale equazione segue il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \beta = \text{A} + \text{B} + \text{C} \\ 0 = -\text{A}\alpha - \text{C}\alpha - \text{B} - \text{A} \\ 0 = \text{A}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{B} = \beta - \text{C} \\ 0 = -\text{C}\alpha - \text{B} \\ \text{A} = 0 \end{cases}$$

Da cui risulta

$$0 = -\text{C}\alpha - \beta + \text{C} = -\beta + \text{C}(1\text{-}\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{C} = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$\text{B} = \beta - \text{C} \quad \Rightarrow \quad \text{B} = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha}$$

$$\text{A} = 0$$

Seconda procedura

$$\frac{\beta z^2}{(z-\alpha)(z-1)} = a + b\left(\frac{z}{z-\alpha}\right) + c\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Deve essere vera per qualunque z, quindi anche per

$$z = 0 \qquad 0 = a$$

$$z = -1 \qquad -\frac{\beta}{2(1+\alpha)} = a - \frac{b}{(-1-\alpha)} - \frac{c}{2}$$

$$z = 2 \qquad \frac{4\beta}{(2\text{-}\alpha)1} = a + \left(\frac{2}{2-\alpha}\right)b + \frac{2c}{1}$$

$$1) \quad \begin{cases} \dfrac{\beta}{2(1+\alpha)} = \dfrac{b}{(1+\alpha)} + \dfrac{c}{2} \\ \dfrac{4\beta}{2\text{-}\alpha} = \dfrac{2b}{2-\alpha} + 2c \end{cases}$$

Risolvendo il sistema 1): $a = 0, \quad \text{b}=\dfrac{\beta\alpha}{\alpha\text{-}1}, \quad \text{c}=\dfrac{\beta}{1\text{-}\alpha}$

Terza procedura

$$\frac{\beta z^2}{(z-\alpha)(z-1)} = a + b\left(\frac{z}{z-\alpha}\right) + c\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

- Le due procedure precedenti richiedono sempre di risolvere un sistema di equazioni in più incognite
- È perciò raccomandato **usare la seguente procedura**
  - Per z=0 a=0
  - Se ora moltiplichiamo tutti e due i membri della equazione per

$$\left(\frac{z-\alpha}{z}\right)$$

si ha

$$\frac{\beta z^2}{(z-\alpha)(z-1)}\frac{(z-\alpha)}{z} = 0\frac{(z-\alpha)}{z} + b + c\frac{z}{z-1}\frac{(z-\alpha)}{z} \Rightarrow \frac{\beta z}{z-1} = b + c\frac{z-\alpha}{z-1}$$

- z=α $\Rightarrow$ $b = \dfrac{\beta\alpha}{\alpha-1}$

- Se ora moltiplichiamo per

$$\left(\frac{z-1}{z}\right)$$

si ha

$$\frac{\beta z^2}{(z-\alpha)(z-1)}\frac{(z-1)}{z} = 0\frac{(z-1)}{z} + b\frac{z}{z-\alpha}\frac{(z-1)}{z} + c$$

- per z=1 $\Rightarrow$ $\dfrac{\beta}{1-\alpha} = c$

Questa procedura viene denominata calcolo dei residui

GENERALIZZAZIONE DELLA ESPANSIONE IN FRAZIONI PARZIALI

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}$$

- Siano p_1, p_2, …, p_n le radici di

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (\alpha)$$

  - si dicono **poli**;
  - la equazione (α) viene detta **equazione caratteristica**;

- Per il momento assumiamo $p_i \neq 0$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

- Quindi se tutti i **poli** p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sono **distinti**:

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)}$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{z}{z-p_1} \right) + \ldots + \alpha_n \left(\frac{z}{z-p_n} \right)$$

α_i := RESIDUI

$i = 0, 1, \ldots, n$

e quindi

$$\alpha_0 = F(z)\big|_{z=0} = \frac{b_n}{(-p_1)(-p_2)\ldots(-p_n)}$$

$$\alpha_1 = \frac{(z-p_i)}{z} F(z)\bigg|_{z=0} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

e quindi

$$f(k) = \alpha_0 \delta(k) + \alpha_1 (p_1)^k + \ldots + \alpha_n (p_n)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

➢ Se ci sono **poli multipli**:

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{(z-p_1)^{n_1}(z-p_2)^{n_2}\ldots(z-p_r)^{n_r}}$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$$

allora

$$F(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 z}{(z-p_1)} + \frac{\alpha_2 z^2}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n_1} z^{n_1}}{(z-p_1)^{n_1}}$$

$$+ \frac{\beta_1 z}{(z-p_2)} + \frac{\beta_2 z^2}{(z-p_2)^2} + \ldots + \frac{\beta_{n_2} z^{n_2}}{(z-p_2)^{n_2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\xi_1 z}{(z-p_r)} + \ldots + \frac{\xi_{n_r} z^{n_r}}{(z-p_r)^{n_r}}$$

Con l'aiuto della seguente tabella:

Termini Elementari $F(z)$	$f(k)$ **per** $k = 0, 1, 2, \ldots$
$\frac{z}{(z-a)}$	a^k
$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$(k+1)a^k$
$\frac{z^3}{(z-a)^3}$	$\frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^k$
$\frac{z^4}{(z-a)^4}$	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}a^k$
$\frac{z^5}{(z-a)^5}$	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}a^k$

si ottengono facilmente le sequenze generatrici di ciascuno dei termini della decomposizione in frazioni parziali

Esempio

Determinare l'antitrasformata z della funzione:

$$F(z) = \frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - [2\cos(\omega T)]z + 1}$$

Si riscriva $F(z)$ nella forma:

$$F(z) = \frac{z\sin(\omega T)}{\left(z - e^{j\omega T}\right)\left(z - e^{-j\omega T}\right)}$$

Si ha:

$$\frac{z\sin(\omega T)}{\left(z - e^{j\omega T}\right)\left(z - e^{-j\omega T}\right)} = \alpha_1 \frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \alpha_2 \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}$$

con:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2j} \; ; \; \alpha_2 = \alpha_1^* = \frac{-1}{2j}$$

Quindi:

$$F(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}}\right) - \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z - e^{-j\omega T}}\right)$$

Da cui:

$$f(k) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega T}\right)^k - \frac{1}{2j}\left(e^{-j\omega T}\right)^k = \sin(k\omega T) \;\; , \;\; k = 0,1,\ldots.$$

Esempio

Utilizzando il metodo dei fratti semplici, calcolare l'antitrasformata della funzione:

$$F(z)=\frac{z^3+2z^2+z+1}{z^3-z^2-8z+12}$$

Si fattorizzi il denominatore di F(z):

$$z^3-z^2-8z+12=(z-2)^2(z+3)$$

Si ha perciò:

$$\frac{z^3+2z^2+z+1}{z^3-z^2-8z+12}=\alpha_0+\alpha_1\frac{z}{z-2}+\alpha_2\frac{z^2}{(z-2)^2}+\beta_1\frac{z}{z+3}=$$

$$=\frac{(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1)z^3+(-\alpha_0+\alpha_1+3\alpha_2-4\beta_1)z^2}{(z-2)^2(z+3)}+$$

$$+\frac{(-8\alpha_0-6\alpha_1+4\beta_1)z+12\alpha_0}{(z-2)^2(z+3)}$$

Eguagliando i numeratori si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1=1\\-\alpha_0+\alpha_1+3\alpha_2-4\beta_1=2\\-8\alpha_0-6\alpha_1+4\beta_1=1\\12\alpha_0=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{12}\ ;\ \alpha_1 = -\frac{9}{50}\ ;\ \alpha_2 = \frac{19}{20};\ \beta_1 = \frac{11}{75}\ .$$

$$F(z) = \frac{1}{12} - \frac{9}{50}\frac{z}{z-2} + \frac{19}{20}\frac{z^2}{(z-2)^2} + \frac{11}{75}\frac{z}{z+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(k) = \frac{1}{12}\delta(k) - \frac{9}{50}2^k + \frac{19}{20}(k+1)2^k + \frac{11}{75}(-3)^k$$

Data la funzione:

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{(z-p_1)^{n_1}(z-p_2)^{n_2}\ldots(z-p_r)^{n_r}}$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$$

esiste sempre lo sviluppo:

$$F(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 z}{(z-p_1)} + \frac{\alpha_2 z^2}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n_1} z^{n_1}}{(z-p_1)^{n_1}}$$

$$+ \frac{\beta_1 z}{(z-p_2)} + \frac{\beta_2 z^2}{(z-p_2)^2} + \ldots + \frac{\beta_{n_2} z^{n_2}}{(z-p_2)^{n_2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\xi_1 z}{(z-p_r)} + \ldots + \frac{\xi_{n_r} z^{n_r}}{(z-p_r)^{n_r}}$$

➢Infatti, mettendo a denominatore comune lo sviluppo in fratti semplici, si ottiene:

$$F(z)=\frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n}{(z-p_1)^{n_1}(z-p_2)^{n_2}\ldots(z-p_1)^{n_q}}$$

in cui i parametri c_i dipendono dagli (n+1) coefficienti α_0, α_1, α_2, …., ξ_{nq}, che devono essere scelti in modo che: $c_i = b_i$., i=0,1,…,n.

➢Si hanno quindi n+1 equazioni (linearmente indipendenti tra loro, per costruzione) in (n+1) incognite ⇒ la soluzione esiste sempre.

Metodo della divisione diretta

•Ricordiamo che, data f(k), per definizione:

$$Z[f(k)] := F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \ldots..$$

•Quando occorre trovare solo un numero limitato di termini di f(k) può essere efficace operare direttamente la divisione dei polinomi che compongono F(z). Ad esempio:

Esempio

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 8z + 12}$$

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 + 2z^2 + z + 1 & z^3 - z^2 - 8z + 12 \\ \cline{2-2}
z^3 - z^2 - 8z + 12 & 1 + 3z^{-1} + 12z^{-2} + 25z^{-3} + \ldots \\ \cline{1-1}
\quad 3z^2 + 9z - 11 & \\
\quad 3z^2 - 3z - 24 + 36z^{-1} & \\ \cline{1-1}
\qquad 12z + 13 - 36z^{-1} & \\
\qquad 12z - 12 - 96z^{-1} + 144z^{-2} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 25 + 60z^{-1} - 144z^{-2} &
\end{array}
$$

$$F(z) = 1 + 3z^{-1} + 12z^{-2} + 25z^{-3} + \ldots$$

RAPPRESENTAZIONE CON LO STATO

La rappresentazione con somma di convoluzione di un sistema a tempo discreto equivale alla sua rappresentazione con equazione alle differenze per condizioni iniziali nulle. Lo stesso avviene per la rappresentazione con funzioni di trasferimento in Z.

In generale, le condizioni iniziali possono non essere nulle e occorre tener conto del valore che assumono per determinare la soluzione di un'equazione alle differenze di ordine *n*.

Le condizioni iniziali associate ad una equazione alla differenza contengono l'informazione sullo stato del sistema all'istante 0.

2.1 Definizione

Dato un sistema orientato

$$\Sigma = \{(u(t),y(t),x(t)),\ P(u(t),y(t),x(t)) = VERO\} \subseteq \Omega = U^I \times Y^I \times X^I$$

con u variabile di ingresso e y variabile di uscita, la variabile x è detta *stato* di Σ se, dati due comportamenti

$$c(t) = (u(t),y(t),x(t)) \in \Sigma \qquad c'(t) = (u'(t),y'(t),x'(t)) \in \Sigma$$

per ogni $t_0 \in T$, si ha che

a) $x(t_0) = x'(t_0)$ implica che il comportamento $c''(t)$ definito da $c''(t) = c(t)$ per $t < t_0$ e $c''(t) = c'(t)$ per $t \geq t_0$ appertiene a Σ;

b) $x(t_0) = x'(t_0)$ e $u(t) = u'(t)$ per $t \geq t_0$, implica $c(t) = c'(t)$ per $t > t_0$.

4.1 Proposizione (Proprietà dello stato)

Dato un sistema orientato

$$\Sigma = \{(u(t),y(t),x(t)),\ P(u(t),y(t),x(t)) = VERO\} \subseteq \Omega = U^I \times Y^I \times X^I$$

con ingresso u, uscita y e stato x, si ha che, in ogni comportamento $c(t) = (u(t),y(t),x(t) \in \Sigma$ e per ogni $t_0 \in T$, l'uscita $y(t)$ per $t > t_0$ è determinata da $x(t_0)$ e $u(t)$ per $t \geq t_0$.

I sistemi lineari a tempo discreto che abbiamo preso in considerazione fino ad ora si rappresentano, qualora si utilizzino variabili di stato, con equazioni della forma

$$(1)\quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

(rappresentazione implicita)

L'insieme di stato X costituisce uno spazio vettoriale, che supporremo di dimensione finita, cioè X = R^n. Quindi:

$\mathbf{X} = R^n$; $\mathbf{dim}(X) = n$

$\mathbf{U} = R^m$; $\mathbf{dim}(U) = m$ (noi ci limiteremo ad $m = 1$)

$\mathbf{Y} = R^p$; $\mathbf{dim}(Y) = p$ (noi ci limiteremo a $p = 1$)

Con tali rappresentazioni siamo in grado di risolvere facilmente il seguente fondamentale problema:

Problema Date le condizioni iniziali x(0) = x_0 e l'ingresso u(k), k≥0 calcolare x(k) e y(k), per ogni k ≥0.

A tale scopo, infatti, è sufficiente applicare iterativamente la prima delle (1)

Ad esempio:

$$x(k) = A\,x(k-1) + B\,u(k-1) =$$

$$= A\,[\underbrace{A\,x(k-2) + B\,u(k-2)}_{x(k-1)}] + B\,u(k-1) =$$

$$= A^2\,x(k-2) + A\,B\,u(k-2) + B\,u(k-1)$$

Iterando più volte la procedura si arriva alla:

$x(k) = A^k x(0) + A^{k-1} B\, u(0) + A^{k-2} B\, u(1) + \dots$

$\dots + A\, B\, u(k-2) + B\, u(k-1)$

che in forma compatta può essere scritta come:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)$$

Per quanto riguarda y(k) si ha quindi:

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B u(i) + Du(k)$$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)$$

Risposta libera

(dipendente dalle sole condizioni iniziali)

Risposta forzata

(dipendente dal solo ingresso).

$$y(k) = CA^k x(0) + \overbrace{\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B u(i) + Du(k)}$$

- La **risposta libera** è rappresentata, nel caso lineare e stazionario, da

$$x_l(k) = \Phi(k)x_0 \; (= \Phi(k-k_0)x(k_0) \text{ se listante iniziale è } k_0)$$

$$y_l(k) = C\Phi(k)x_0 = \Psi(k)x_0$$

dove $\Phi(k)$, $\Psi(k)$ sono matrici dette di transizione di stato e di risposta libera.

- La **risposta forzata**, sempre nel caso lineare stazionario, è rappresentata da

$$x_f(k) = \sum_{i=0}^{k-1} H(k-i)u(i) = \sum_{i=1}^{k+1} H(i)u(k-i)$$

$$y_f(k) = \sum_{i=0}^{k-1} CH(k-i)u(i) = \sum_{i=0}^{k-1} W(k-i)u(i)$$

dove i secondi membri sono somme di convoluzione, di cui le successioni di matrici $H(\cdot)$, $W(.)$ vengono dette nuclei. Si può ricavare il nucleo utilizzando come ingresso il delta di Kronecker.

- Esiste un legame assai importante fra matrice di transizione di stato e nucleo dato dalle **proprietà di composizione**
  - Nel caso di sistemi lineari e stazionari si ha:

$$H(k) = \Phi(k-i)\, H(i) \qquad 0 < i < k$$

- La rappresentazione con matrice di transizione e nucleo coincide con quella implicita quando si considera l'evoluzione dello stato ad un passo:

$$x(k+1) = \Phi(k)\, x(k) + \Psi(k)\, u(k)$$

con $A \equiv \Phi(k)$ e $B \equiv \Psi(k)$

$$\Phi(k) = A^k$$

$$\Psi(k) = C\Phi(k) = CA^k$$

$$H(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ A^{k-1}B & k \neq 0 \end{cases}$$

$$W(k) = \begin{cases} D & k = 0 \\ CA^{k-1}B & k \neq 0 \end{cases}$$

H(k): matrice delle risposte impulsive nello stato, nucleo della $\sum$ di convoluzione

W(k): matrice delle risposte impulsive in uscita

LEGAME TRA RAPPRESENTAZIONI ARX E RAPPRESENTAZIONI CON LO STATO

$y(k)= a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + ….. + a_ny(k-n) +$

$b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + ….. + b_nu(k-n)$

Z-trasformando si ottiene

$(1 - a_1z^{-1} - ….. - a_nz^{-n})Y(k) = (b_1z^{-1} + ….. + b_nz^{-n})U(k)$

$$Y(z) = \frac{b_1z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots.. + b_n z^{-n}}{1 - a_1z^{-1} - a_2 z^{-2} + \ldots.. + a_n z^{-n}} U(z) =$$

$$= \frac{b_1z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots.. + b_n}{z^n - a_1z^{n-1} - a_2 z^{n-2} + \ldots.. + a_n} U(z)$$

LEGAME TRA RAPPRESENTAZIONI ARX E RAPPRESENTAZIONI CON LO STATO

x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)

y(k) = Cx(k) Z-trasformando si

zX(z) = AX(z) + Bu(z) + [zx(0)]

Y(z) = CX(z) ovvero

(zI-A)X(z) = Bu(z) + [zx(0)]

Y(z) = CX(z) e quindi

$X(z) = (zI-A)^{-1}Bu(z) + [z(zI-A)^{-1}x(0)]$

$Y(z) = C(zI-A)^{-1}BX(z) + [zC(zI-A)^{-1}x(0)]$

LEGAME TRA RAPPRESENTAZIONI ARX E RAPPRESENTAZIONI CON LO STATO

$y(k)= a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \ldots\ldots + a_ny(k-n) +$

$\qquad b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \ldots\ldots + b_nu(k-n)$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & b_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{b_1z^{n-1} + b_2\, z^{n-2} + \ldots\ldots + b_n}{z^n - a_1z^{n-1} - a_2\, z^{n-2} + \ldots\ldots + a_n} = C(zI-A)^{-1}B$$

$$C(zI-A)^{-1}B = C(zI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix})^{-1} B = C \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & -1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & z-a_1 \end{bmatrix}^{-1} B =$$

$$2[b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad b_1] \frac{1}{\det(zI-A)} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_1}{z^n - a_{n-1} z^{n-1} - a_{n-2} z^{n-2} - \dots - a_1}$$

y(k)= a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + ….. + a_ny(k-n) +

b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + ….. + b_nu(k-n)

risposta a u(k) = δ(k) con condizioni iniziali nulle:

y(0) = 0; y(1) = b_1; y(2) = $a_1 b_1 + b_2$; ……..

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad b_1]$$

risposta a u(k) = δ(k) con condizioni iniziali nulle:

x(0) = 0 ⇒ y(0) = 0;

x(1) = A0 + B δ(0) = $\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ ⇒ y(1) = $(b_n \quad \dots \quad b_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ =b_1; …..

ULTERIORI OSSERVAZIONI

Applicando la trasformata Z ad una rappresentazione in spazio di stato, dalle relazioni

$X(z) = z(zI-A)^{-1}x(0) + (zI-A)^{-1}Bu(z)$

$Y(z) = CX(z) = zC(zI-A)^{-1}x(0) + C(zI-A)^{-1}Bu(z)$

otteniamo

1. $\Phi(z) = z(zI-A)^{-1}$
2. $H(z) = (zI-A)^{-1}B$
3. $\Psi(z) = z^{-1}\Phi(z)B$
4. $W(z) = C\,(zI-A)^{-1}B$

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Impiego delle equazioni alle differenze e della risposta impulsiva (sequenza dei pesi)

⇓

calcolo iterativo della risposta di un sistema TD ad una data sequenza di ingressi

⇓

- Soluzione in forma chiusa banale solo in casi particolarmente semplici,
- Difficoltà di utilizzo della risposta impulsiva per l'analisi delle proprietà del sistema e della risposta
- Attraverso il problema immagine e la trasformata Z, per sistemi lineari e stazionari (nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle) si può ricavare una soluzione in forma chiusa per l'analisi delle proprietà del sistema e della sua risposta.

Dato il generico sistema ARX

$$y(k) + a_1\, y(k-1) + a_2\, y(k-2) + \dots + a_n\, y(k-n) =$$
$$= b_0\, u(k) + b_1\, u(k-1) + b_2\, u(k-2) + \dots + b_m\, u(k-n)$$

le trasformate Z di y(k) e u(k) verificano la relazione Y(z)=H(z)U(z)

con

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

H(z) = funzione di trasferimento del sistema in studio.

Si constata inoltre che se U(z) è la trasformata della sequenza di impulsi di Kronecker,

$$Y(z)=H(z)$$

e dunque che

$$Z^{-1}[H(z)]=h(k)$$

Nelle condizioni in cui operiamo, H(z) è la trasformata z della sequenza dei pesi del sistema.

Esempio

Equazione alle differenze del primo ordine:

$$y(k) = \beta u(k) + \alpha y(k-1)$$

Trasformata z (ipotesi di condizioni iniziali nulle):

$$y(z) = \beta u(z) + \alpha \cdot z^{-1} y(z) \Rightarrow \left(1 - \alpha \cdot z^{-1}\right) y(z) = \beta u(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(z) = \frac{\beta}{\left(1 - \alpha \cdot z^{-1}\right)} u(z) = \frac{\beta z}{(z - \alpha)} u(z) = H(z) u(z)$$

$$H(z) = \frac{\beta z}{(z - \alpha)}$$ Funzione di trasferimento

Si consideri la risposta del sistema precedente all'ingresso:

$$u(k) = \delta(k)$$

Poiché: $Z[\delta(k)] = u(z) = 1$

si ha: $y(z) = H(z)u(z) = H(z)$

Cioè, la funzione di trasferimento è la trasformata zeta della risposta del sistema all'ingresso $u(k) = \delta(k)$

Esempio

Modello del PIL:

$$y(k) - \alpha(1+\beta)y(k-1) + \alpha\beta y(k-2) = u(k)$$

Trasformata z (ipotesi di condizioni iniziali nulle):

$$y(z) - \alpha(1+\beta)\cdot z^{-1}\cdot y(z) + \alpha\beta\cdot z^{-2}\cdot y(z) = u(z) \Rightarrow$$

$$\left[1 - \alpha(1+\beta)\cdot z^{-1} + \alpha\beta\cdot z^{-2}\right]\cdot y(z) = u(z) \Rightarrow$$

$$y(z) = \frac{1}{1 - \alpha(1+\beta)\cdot z^{-1} + \alpha\beta\cdot z^{-2}}u(z) =$$

$$= \frac{z^2}{z^2 - \alpha(1+\beta)\cdot z + \alpha\beta}u(z) = H(z)u(z)$$

$H(z)$ Funzione di trasferimento

EQUIVALENZA FRA LE RAPPRESENTAZIONI

•Risulta quindi verificato che, sotto le condizioni date (linearità, stazionarietà, condizioni iniziali tutte nulle, ingresso nullo per k<0), i tre modelli:

- ✓Equazione alle differenze
- ✓Somma di convoluzione
- ✓Funzione di trasferimento

sono equivalenti, secondo la definizione di equivalenza già ampiamente discussa in precedenza.

RISPOSTA LIBERA E RISPOSTA FORZATA

Equazione alle differenze:

$$y(k)+a_1 y(k-1)+\cdots+a_n y(k-n)=$$

$$=b_0 u(k)+b_1 u(k-1)\cdots+b_m u(k-m)$$

Trasformata z:

$$y(z)+a_1\left[z^{-1}\cdot y(z)+y(-1)\right]+\cdots+$$

$$\cdots+a_n\left[z^{-n}\cdot y(z)+z^{-n+1}y(-1)+\cdots+y(-n)\right]=$$

$$=b_0 u(z)+b_1 z^{-1}\cdot u(z)+\cdots+b_m z^{-m}\cdot u(z)$$

(ingresso con condizioni iniziali non nulle)

$$y(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}u(z)+\frac{p(z^{-1})}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

Risposta forzata

Risposta libera

Polinomio i cui coefficienti dipendono dalle condizioni iniziali

Esempio

$$\sum_{k=0}^{+\infty}y(k)z^{-k}-\alpha\cdot y(-1)-\alpha\cdot z^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}y(k)z^{-k}=\beta\sum_{k=0}^{+\infty}u(k)\Rightarrow$$

$$y(z)-\alpha\cdot y(-1)-\alpha\cdot z^{-1}y(z)=\beta u(z)\Rightarrow$$

$$y(z)=\frac{\beta\cdot u(z)}{1-\alpha\cdot z^{-1}}+\frac{\alpha\cdot y(-1)}{1-\alpha\cdot z^{-1}}$$

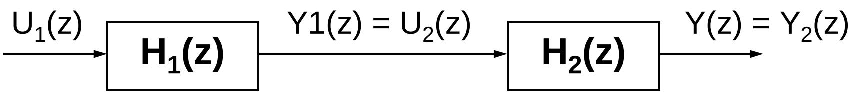
Risposta forzata

Risposta libera

COMPOSIZIONE DI SISTEMI TRAMITE FUNZIONE DI TRASFERIMANTO

- Poiché la funzione di trasferimento è un operatore che applicato alla Z-trasformata dell'ingresso produce per semplice moltiplicazione la Z-trasformata dell'uscita, la **composizione** di **sistemi** può essere trattata in modo **estremamente semplice**

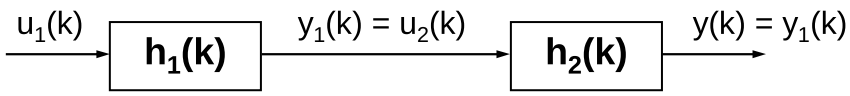
Combinazione in serie o in cascata



$$\frac{Y_2(z)}{U_1(z)} = H_1(z)H_2(z)$$

Esempio

Dati i due sistemi connessi in cascata:



con

$$y_1(k) = u_1(k) + \frac{1}{2} y_1(k-1)$$

$$y_2(k) = u_2(k) + u_2(k-1) - \frac{1}{3} y_2(k-1)$$

Determinare:

- La funzione di trasferimento
- La sequenza dei pesi
- L'equazione alle differenze

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{z + 1}{z + \frac{1}{3}}$$

Funzione di trasferimento

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{6} z^{-1} - \frac{1}{6} z^{-2}} = \frac{z(z+1)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)}$$

- Espansione in frazioni parziali di H(z) :

$$H(z) = \frac{9}{5}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}\frac{z}{z+\frac{1}{3}}$$

Sequenza dei pesi

$$h(k) = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \quad per \;\; k \; = \; 0, \; 1, \; 2, \; \ldots$$

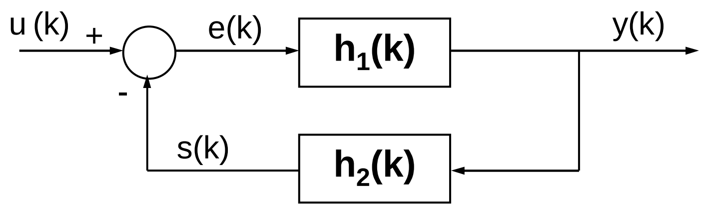
- Dalla relazione tra $Y_2(z)$ e $U_1(z)$:

$$Y_2(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}} \right) U_1(z)$$

Equazione alle differenze

$$y_2(k) = u_1(k) + u_1(k-1) + \frac{1}{6}y_2(k-1) + \frac{1}{6}y_2(k-2)$$

Composizione in controreazione



$$S(z) = H_2(z)Y(z) \quad per\ la\ stazionarietà$$
$$E(z) = U(z) - S(z) = U(z) - H_2(z)Y(z)$$
$$Y(z) = H_1(z)E(z)$$
$$Y(z) = H_1(z)[U(z) - H_2(z)Y(z)]$$
$$Y(z)[1 + H_1(z)H_2(z)] = H_1(z)U(z)$$
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

- La composizione in controreazione è la più frequentemente usata per sistemi di controllo
- Nel caso del controllo automatico, molto spesso $H_2(z)$ è una pura costante.
  - In tal caso si parla di controllo proporzionale.
- Si dice **funzione di trasferimento a ciclo chiuso**:

$$W(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + \frac{H_1(z)}{k_d}}$$

- Lo studio della equazione:

$$1+\frac{H_1(z)}{k_d}=0$$

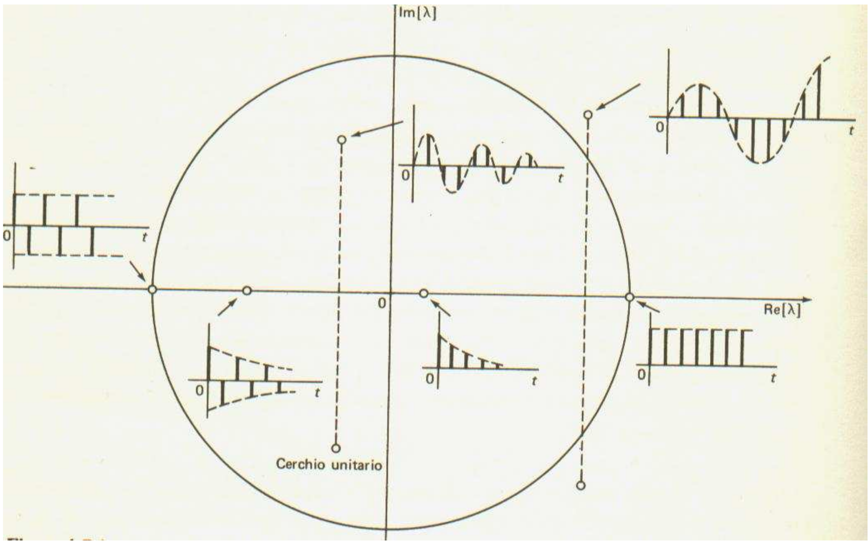
detta "**equazione caratteristica**" permette di riconoscere e mettere in evidenza le più importanti proprietà e prestazioni, dal punto di vista del controllo, del sistema a controreazione

- Al fine di conseguire questo risultato è utile ed opportuno caratterizzare le funzioni di trasferimento tramite le radici del loro numeratore (**zeri della funzione di trasferimento**) e del loro denominatore (**poli della funzione di trasferimento**)

- Come si è già notato nello studio della trasformata z, la funzione di trasferimento può essere scritta in forma fattorizzata, il che rende immediato il calcolo della corrispondente risposta all'impulso.

- Assumendo per semplicità che i poli della funzione di trasferimento considerata siano tutti semplici, conviene riportare in una semplice rappresentazione grafica l'andamento nel tempo delle componenti della risposta all'impulso (modi) a seconda della posizione nel piano z dei poli stessi.

Poli nel piano z e andamenti temporali corrispondenti



STABILITÀ

•Dato il sistema a tempo discreto: $x(t+1) = Ax(t)$

sono stati di equilibrio tutti gli stati $x_e \in X$, tali che:

$$x_e = Ax_e$$

•NB $x_e = 0$ è uno stato di equilibrio (come si possono trovano altri stati di equilibrio?)

•Si fissi un istante iniziale k_0. Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, k_0):$$

$$\| x(k_0) - x_e \| < \delta(\varepsilon, k_0) \Rightarrow \| x(k) - x_e \| < \varepsilon, \ \forall k \geq k_0$$

STABILITÀ ASINTOTICA

•Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile asintoticamente se esso è stabile, e se, inoltre,

$$\exists \delta_a(k_0) : \| x(k_0) - x_e \| < \delta_a(k_0) \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \| x(k) - x_e \| = 0$$

•NB In un sistema lineare, l'unico stato che può essere asintoticamente stabile è lo stato $x_e = 0$. Quando ciò accade, non vi sono altri stati di equilibrio. La stabilità asintotica è dunque una proprietà dell'intero sistema

•Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile asintoticamente globalmente se esso è stabile, e se, inoltre,

$$\forall x(k_0) \in X, \ \lim_{k \to \infty} \| x(k) - x_e \| = 0$$

STABILITÀ ESTERNA

DEFINIZIONE: Un sistema a tempo discreto, lineare e sta-zionario descritto dalle equazioni

$$x(t+1) = Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)$$

è stabile esternamente nello stato zero (cioè relativamente a condizioni iniziali nulle), o stabile BIBO se:

per ogni ingresso u(t) limitato, la corrispondente uscita a partire da condizioni iniziali nulle y(t) è limitata

TEOREMA 1: Un sistema a tempo discreto, lineare e stazio-nario, con risposta impulsiva *W*(*k*), è stabile esternamente (o stabile BIBO) nello stato zero se e solo se:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |W(k)| < \infty$$

TEOREMA 2: Un sistema a tempo discreto, lineare e stazionario, con funzione di trasferimento W(z), è stabile esternamente (o stabile BIBO) nello stato zero se e solo se tutti i poli di W(z) sono all'interno del cerchio di raggio unitario centrato nell'origine del piano complesso.

Dimostrazione del TEOREMA 1

(Solo) Condizione sufficiente.

$$\exists L : |u(k)| < L, \forall k$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} W(k) u(n-k)$$

$$\Downarrow$$

$$|y(n)| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |W(k)| |u(n-k)| \le L \sum_{k=0}^{+\infty} |W(k)| = N$$

Condizione necessaria. Si supponga, per assurdo , che:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |W(k)| = \infty$$

Si consideri l'ingresso: $u(k) = sign[W(r-k)]$

che soddisfa la condizione : $|u(k)| \leq 1, \forall k$

$$\Downarrow$$

$$y(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} W(k) sign[W(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} |W(k)| = \infty$$

che contraddice l'ipotesi.

CRITERI DI STABILITA'

- Si utilizza la funzione di trasferimento:

$$\longrightarrow \boxed{F(z)} \longrightarrow \qquad F(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$

$$a(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

$a(z)$=denominatore di $F(z)$=polinomio caratteristico

Criterio di Jury

• Si costruisce la tabella:

$$a(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

a_0	a_1	a_2	$\cdots$	1
1	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_0
b_0	b_1	$\cdots$	b_{n-1}	
b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
u_0	u_1	u_2	u_3	
u_3	u_2	u_1	u_0	
v_0	v_1	v_2		
v_2	v_1	v_0		

$$b_{n-k-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} \\ 1 & a_{n-k-1} \end{vmatrix}, k = 0, \ldots, n-1$$

$$c_{n-2-k} = \begin{vmatrix} b_0 & b_{k+1} \\ b_{n-1} & b_{n-k-2} \end{vmatrix}, k = 0, \ldots, n-2$$

$$\vdots$$

$$v_{2-k} = \begin{vmatrix} u_0 & u_k \\ u_3 & u_{2-k} \end{vmatrix}, k = 0,1,2$$

• Il modulo di tutte le radici è minore di uno se e solo se:

a) $a(1) > 0$;

b) $a(-1) > 0$ se n pari; $a(-1) < 0$ se n dispari;

c) $1 > |a_0|$, $|b_0| > |b_{n-1}|$, ... , $|u_0| > |u_3|$, $|v_0| > |v_2|$

ANALISI DEL COMPORTAMENTO DI REGIME PERMANENTE IN SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Obiettivo: caratterizzare le situazioni nelle quali la risposta tende ad essere proporzionale all'ingresso.

Si prendono in considerazioni situazioni nelle quali esiste la risposta a regime permanente.

✓ Condizione sufficiente per l’esistenza di una risposta a regime permanente è la stabilità asintotica, oppure, sotto opportune ipotesi, la stabilità esterna.

✓ Ingressi considerati :

• segnali a struttura polinomiale
• segnali sinusoidali

STIMOLI POLINOMIALI CANONICI

• Polinomi fattoriali canonici, preferiti per motivi computazionali.

$$\boxed{\tilde{u}_k(h) = \frac{h^{(k)}}{k!} = \frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{k!}}$$

$$\boxed{\tilde{u}_k(z) = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}}$$

•Risulta :

$$\tilde{y}(h) = C_0 \frac{h^{(k)}}{k!} + \cdots + C_{k-1} h^{(1)} + C_k \;;$$

$$C_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i W(z)}{dz^i} \right]_{z=1} \;;\; i = 0,1,\ldots,k.$$

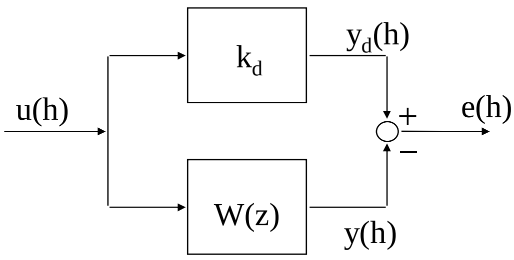
• <u>Nota</u> . L'espressione dei C_i deriva da :

• teorema del valore finale per segnali a tempo discreto

SISTEMA DI ERRORE

• Può essere conveniente definire un sistema di errore :

$$y_d(h) = k_d u(h)$$
$$\tilde{y}_d(h) = k_d \tilde{u}(h)$$



$$\boxed{\begin{aligned} e(h) &= y_d(h) - y(h) = k_d u(h) - y(h) \\ \tilde{e}(h) &= \tilde{y}_d(h) - \tilde{y}(h) = k_d \tilde{u}(h) - \tilde{y}(h) \end{aligned}}$$

• Anche per il sistema di errore può essere definita la risposta a regime permanente, ammesse verificate le condizioni per la sua esistenza. Essa allora vale :

$$\tilde{e}(h) = C_{e,0}\frac{h^{(k)}}{k!} + \cdots + C_{e,k-1}h^{(1)} + C_{e,k};$$

$$C_{e,i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i W_e(z)}{dz^i}\right]_{z=1} \quad ; i = 0,1,\ldots,k.$$

DEFINIZIONE DI TIPO

Vale la seguente definizione di tipo di un sistema :

<u>Definizione</u> : Un sistema a tempo discreto si dice di tipo k se e solo se l'errore di regime permanente corrispondente all'ingresso canonico di ordine k è pari ad una costante diversa da zero.

Nel caso di un sistema di tipo k si ha che l'errore a regime è dato da

$$e_k = C_{e,k}$$

Condizioni di appartenenza al tipo k :

a) il sistema è di tipo k se e solo se

$$C_{e,0} = C_{e,1} = \cdots = C_{e,k-1} = 0$$
$$C_{e,k} \neq 0,$$

b) il sistema è di tipo k se e solo se
$W_e(z)$ ha uno zero di molteplicità k in z = 1

$$W(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{(z-1)^k P_1(z)}{Q(z)}$$

Esempio.

Sistema di tipo 0 : presenza in $W_e(z)$di uno zero in z = 1 di molteplicità 0

errore di regime

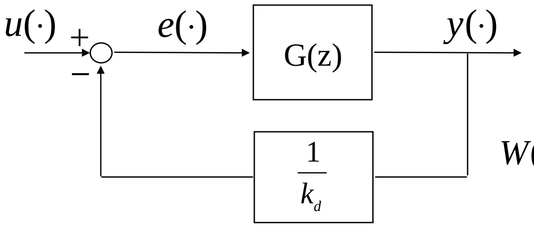
$$e_0 = C_{e,0} = \left[k_d - W(z)\right]\Big|_{z=1} = W_e(z)\Big|_{z=1} \neq 0$$

Sistema di tipo k : presenza in $W_e(z)$di uno zero in z = 1 di molteplicità k

errore di regime

$$e_k = C_{e,k} = \left[\frac{1}{(z-1)^k} W_e(z)\right]\Bigg|_{z=1} \neq 0$$

c) Tenendo in conto la struttura del sistema :



$$W(z) = \frac{G(z)}{1+\frac{G(z)}{k_d}} = \frac{k_d G(z)}{k_d + G(z)}$$

$$W_e(z) = k_d - W(z) = \frac{k_d^2}{k_d + G(z)}$$

il sistema è di tipo k se e solo se G(z) ha un polo di molteplicità k in z = 1. Corrispondentemente :

$$\boxed{e_0 = C_{e,0}} = \left.\frac{k_d^2}{k_d + G(z)}\right|_{z=1} = \boxed{\frac{k_d^2}{k_d + k_G}}$$

Sistema di tipo 0

$$e_k = C_{e,k} = \left.\frac{1}{(z-1)^k}\frac{k_d^2}{k_d + G(z)}\right|_{z=1} =$$

$$= \left.\frac{k_d^2}{k_d(z-1)^k + (z-1)^k G(z)}\right|_{z=1} = \boxed{\frac{k_d^2}{k_G}}$$

Sistema di tipo k (k diverso da zero)

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE A DISTURBI

• Si considera come disturbo una costante (polinomio fattoriale canonico di ordine 0).

✓ sistema astatico : l'errore a regime permanente, in risposta a tale disturbo, è nullo.

✓ sistema statico : l'errore a regime permanente, in risposta a tale disturbo, è finito.

• Sia $y_n(h)$ la risposta al disturbo; si desidera che essa sia identicamente nulla:

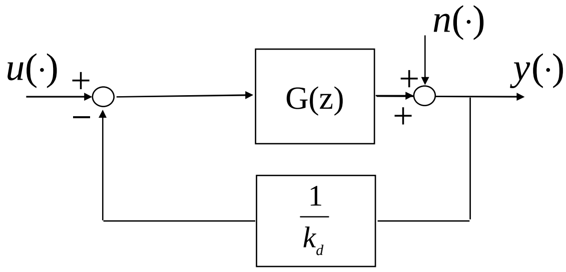
$$e_n(h) = -y_n(h)$$
$$\tilde{e}_n(h) = -\tilde{y}_n(h)$$

• Sia $W_n(z)$ la funzione di trasferimento disturbo-uscita. Allora :

$$\tilde{e}_n = -W_n(z)\big|_{z=1}$$

• Per il legame diretto e la soluzione parziale occorre specificare il punto di applicazione del disturbo.

✓ disturbo additivo in uscita :

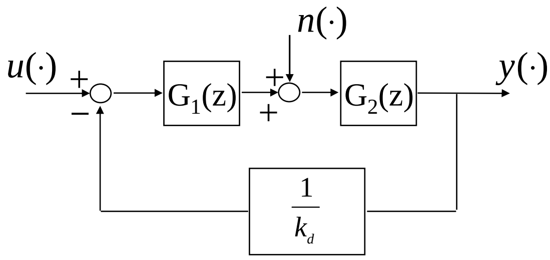


$$W_n = \frac{k_d}{k_d + G}$$

Il sistema è astatico se e solo se G(z) ha un polo in z=1

Se il sistema è statico : $\tilde{y}_n(h) = -\tilde{e}_n(h) = \dfrac{k_d}{k_d + k_G}$

✓ disturbo additivo in un punto intermedio della catena diretta:



$$W_n(z) = \frac{G_2(z)}{1 + \dfrac{G_1(z)G_2(z)}{k_d}} = \frac{k_d G_2(z)}{k_d + G_1(z)G_2(z)}$$

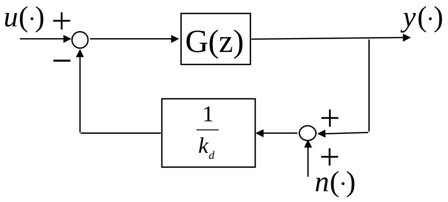
Zeri di $W_n(z)$: zeri di $G_2(z)$ ($G_2(z)$ non ha zeri in z = 1)
poli di $G_1(z)$

Si ha astatismo quando i blocchi a monte del punto di applicazione del disturbo ($G_1(z)$) hanno un polo in $z = 1$.

Se il sistema è statico :

$$\tilde{y}_n(h) = \begin{cases} \dfrac{k_d k_{G2}}{k_d + k_{G1} k_{G2}} & ; \text{ se } G_2(z) \text{ non ha poli in } z = 1 \\ \dfrac{k_d}{k_{G1}} & ; \text{ se } G_2(z) \text{ ha poli in } z = 1 \end{cases}$$

✓ disturbo additivo in reazione :



$$W_n(z) = \frac{-\dfrac{G(z)}{k_d}}{1 + \dfrac{G(z)}{k_d}} = -\frac{G(z)}{k_d + G(z)}$$

Non può esserci astatismo :

$$\tilde{y}_n(h) = \begin{cases} \dfrac{-k_G}{k_d + k_G} & ; \text{ se } G(z) \text{ non ha poli in } z = 1 \\ -1 & ; \text{ se } G(z) \text{ ha un polo in } z = 1 \end{cases}$$