



UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Serie di Fourier

Introduzione

Alcune notazioni e terminologie

Sia E un insieme lineare, se a ciascuno degli elementi $x \in E$ si fa corrispondere il numero $\|x\|$ soddisfacente alle tre proprietà seguenti:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ se e solo se $x = \theta$ dove θ è l'elemento nullo dell'insieme lineare E .
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ per $x \in E$ e per ogni numero α (reale o complesso a seconda che E sia reale o complesso).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ qualunque siano $x, y \in E$; si dice che E è uno spazio normato e il numero $\|x\|$ si chiama norma dell'elemento x .
La (3) si chiama disuguaglianza triangolare ed implica la (4).
4. $\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|$ in particolare $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$.

In uno spazio normato E si può definire la nozione di limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Dalla disuguaglianza (4): $\| \|x_n\| - \|x\| \| \leq \|x_n - x\|$ si evince che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$$

Inoltre: se la successione di elementi $x_n \in E$ converge ad un elemento $x \in E$, essa soddisfa la condizione di Cauchy secondo la quale

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \text{ tale che } \|x_n - x_m\| < \varepsilon \text{ se } n, m > N$$

L'inverso, in generale, non è vero; esistono spazi lineari normati in cui si possono trovare successioni di elementi che soddisfano la condizione di Cauchy, ma non convergono a nessun elemento di E .

Uno spazio lineare normato E , per definizione, si dice completo se ogni successione di elementi $x_n \in E$ e soddisfacente la condizione di Cauchy converge ad un elemento $x \in E$.

Uno spazio lineare completo si dice anche spazio di Banach.

L'insieme dei numeri reali è uno spazio di Banach con $\|x\| = |x|$.

1. Indicheremo con $C(a,b)$ lo spazio lineare normato delle funzioni continue sull'intervallo chiuso $[a,b]$ con norma

$$\|f\|_{C(a,b)} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad (1)$$

C^* è lo spazio lineare normato delle funzioni continue sull'asse reale, periodiche di periodo 2π ed aventi norma

$$\|f\|_{C^*} = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| = \max_{a \leq x \leq a+2\pi} |f(x)| \quad (2)$$

dove a è un numero reale qualsiasi.

Ovviamente la restrizione di $f \in C^*$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$ appartiene a $C(0, 2\pi)$; il viceversa non vale in quanto $f \in C^*$ implica $f(0) = f(2\pi)$.

Una funzione $f \in C(0, 2\pi)$ soddisfacente la condizione $f(0) = f(2\pi)$, dopo un prolungamento periodico di periodo 2π , si trasforma in una funzione di C^* .

2. Sia Ω un intervallo aperto, eventualmente non limitato.

Indichiamo con $L' = L'(\Omega)$ l'insieme delle funzioni reali o complesse assolutamente integrabili (in senso improprio) in Ω .

Se si suppone che le funzioni siano integrabili nel senso di Lebesgue, tale insieme si indica con $L(\Omega)$.

Le proprietà che otterremo per le funzioni $f \in L'$ sono valide, con piccole modifiche, anche per le funzioni $f \in L$.

Il simbolo $f \in L'(L)$ significa che $f \in L'$ o $f \in L$.

La norma di $f \in L'(L)$ è definita come segue

$$\|f\|_L = \int_{\Omega} |f(x)| dx \quad (3)$$

Se f è una funzione complessa: $f(x) = u(x) + jv(x)$, allora

$$\|f\|_L = \int_{\Omega} |f(x)| dx = \int_{\Omega} \sqrt{u^2(x) + v^2(x)} dx$$

L'elemento nullo è una qualsiasi funzione $\theta = \theta(x)$ per la quale

$$\int_{\Omega} |\theta(x)| dx = 0$$

Pertanto in $L'(L)$ due funzioni f e g che non sono identicamente uguali in Ω vengono considerate equivalenti se differiscono di $\theta(x)$.

Tenuto presente ciò, non è difficile verificare che la (3) soddisfa le proprietà caratteristiche di una norma:

- i) $\|f\|_L \geq 0$; $\|f\|_L = 0$ implica $f = \theta$;
- ii) $\|\alpha \cdot f\|_L = |\alpha| \cdot \|f\|_L$ per ogni numero α ;
- iii) Se $f, g \in L'(L)$, allora $f + g \in L'(L)$ e

$$\|f + g\|_L \leq \|f\|_L + \|g\|_L$$

Se $f, f_1, f_2, \dots \in L'(L)$ allora

$$\|f_n - f\| = \int_{\Omega} |f(x) - f_n(x)| dx \quad (4)$$

e la convergenza di f_n ad f nella metrica di $L'(L)$ è equivalente al tendere a zero dell'integrale a secondo membro della (4).

In questo caso si dice che f_n converge a f in media su Ω .

3. Con $L'_2 = L'_2(\Omega)$ indichiamo l'insieme delle funzioni f reali o complesse definite su Ω tali che:

- i) i loro integrali su Ω abbiano al più un numero finito di singolarità;
- ii) siano a quadrato integrabile, nel senso che

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Se Ω è limitato allora $f \in L'_2(\Omega)$ se il suo integrale $\int_{\Omega} f(x) dx$ esiste nel senso di Riemann o se

ha un numero finito di singolarità, allora il quadrato del suo modulo è integrabile in senso improprio.

Lo spazio $L'_2(L_2)$ è uno spazio normato con

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Se $f, f_1, f_2, \dots \in L'_2(L_2)$ allora

$$\|f_n - f\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

La successione di funzione $f_n \in L'_2(L_2)$ converge a f , in Ω , nel senso della media quadratica se l'integrale a secondo membro tende a zero.

Osservazioni

1. Se $f \in L'_2(L_2)$ e Ω è limitato risulta $L'_2(\Omega) \subset L'(\Omega)$.

Infatti si dimostra che

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx \leq |\Omega|^{1/2} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

dove $|\Omega|$ denota la lunghezza dell'intervallo di integrazione.

Per esempio se $\Omega = [0,1]$ allora

$$\frac{1}{x^\alpha} \in L'(\Omega) \text{ se } \alpha < 1; \quad \frac{1}{x^\alpha} \in L'_2(\Omega) \text{ se } \alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha < 1$$

Se $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ allora $1 \leq 2\alpha$ e quindi $\frac{1}{x^\alpha} \notin L'_2(\Omega)$ mentre $\frac{1}{x^\alpha} \in L'(\Omega)$.

Se $\alpha > \frac{1}{2}$ allora $\frac{1}{x^\alpha} \in L'_2(1, +\infty)$ mentre $\frac{1}{x^\alpha} \in L'(1, +\infty)$ solo se $\alpha > 1$:

$$\frac{1}{x^{3/4}} \in L'_2(1, +\infty); \quad \frac{1}{x^{3/4}} \notin L'(1, +\infty)$$

2. Si dimostra che $L'_2(\Omega)$ non è completo ($L_2(\Omega)$ è completo).

Serie di Fourier

Questo capitolo è dedicato allo studio dello sviluppo in serie di Fourier, l'esposizione della teoria sarà concisa ma sufficiente per le applicazioni a molti problemi della fisica matematica.

La ragione per cui la teoria di Fourier relativa allo sviluppo in serie di funzioni trigonometriche è molto importante nella pratica è che certi tipi di funzioni discontinue che non possono essere sviluppate in serie di potenze possono essere sviluppate in serie di Fourier.

Inoltre tale serie è divenuta uno strumento indispensabile per l'analisi di una vasta classe di problemi (fisici ed ingegneristici) relativi a fenomeni vibratorii e periodici.

Serie di Fourier (L' ESSENZIALE)

Assegnato un segnale $x(t)$ di periodo T , il segnale definito nel seguente modo

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & t < -\frac{T}{2}, \quad x(t) > \frac{T}{2} \end{cases}$$

è detto "segnale base". Si osservi che

$$x_0(t) = -x(t) \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] = \mathcal{X}_{(-T/2, T/2)}(t)$$

Un segnale periodico $x(t)$, di periodo T si può esprimere come somma di traslate del "segnale base" :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT).$$

Se T è il periodo di $x(t)$, sono periodici di $x(t)$ anche i multipli interi di T : $2T, 3T, \dots, nT, \dots$.

Il più piccolo numero positivo T per cui $x(t) = x(t - T)$ è detto periodo fondamentale o lunghezza d'onda.

Se T indica il periodo fondamentale, $\frac{1}{T} = f$ è detta frequenza fondamentale

(misurata in periodi (cicli) = Hz) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ è la frequenza angolare

(pulsazioni al sec.) $\frac{rad}{sec}$.

La serie di FOURIER per $x(t)$ E' DEFINITA DALLA RELAZIONE

$$x(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right)$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(t) dt ;$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt ;$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt .$$

Se nelle espressioni precedenti si pone $l = T/2$, risulta

$$\frac{k \pi t}{l} = k \frac{2\pi}{T} t = k \omega t \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Pertanto

$$x(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k\omega t dt ; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k\omega t dt$$

oppure

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega t dt ; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega t dt$$

La forma complessa della serie di Fourier è data da

$$x(t) \approx \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

ovviamente

$$c_k = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) (\cos k\omega t - j \sin k\omega t) dt \right] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega t} dt$$

Se $T = 2\pi$ è $\omega = 1$, quindi

$$x(t) \approx \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{jkt}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x(t) e^{-jkt} dt$$

RIASSUMENDO

Un generico segnale periodico $x(t)$, reale e complesso, è uguale alla somma di infiniti segnali esponenziali complessi $x_k(t)$ con

$$x_k(t) = c_k e^{jk\omega t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Detti COMPONENTI ARMONICHE o ARMONICHE ELEMENTARI DEL SEGNALE PERIODICO $x(t)$ le cui frequenze sono multipli interi della frequenza fondamentale $1/T$:

$$f_k = k \frac{1}{T} = kf$$

Si osservi che le funzioni

$$e^{jk\omega t} = \cos k\omega t + j \sin k\omega t$$

Sono periodiche di periodo $\frac{2\pi}{k\omega} = \frac{1}{k} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{k} T = \frac{1}{k} \frac{1}{f}$

Se esprimiamo i coefficienti delle componenti armoniche (armoniche elementari) in coordinate polari, si ottiene

$$c_k = |c_k| e^{-j\varphi_k}$$

$$|c_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \tan \varphi_k = -\frac{b_k}{a_k} \quad \varphi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k} \pm \pi$$

Se $a_k = 0$ si ha $\sin \varphi_k = \frac{-b_k}{|b_k|}$ da cui

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_k = \pi/2 & \text{se } b_k < 0 \\ \varphi_k = -\pi/2 & \text{se } b_k > 0 \end{array} \right.$$

Quindi

$$x(t) \approx \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k| e^{j(k\omega t - \varphi_k)}$$

da cui

$$x(t) + \overline{x(t)} = 2 \operatorname{Re} x(t) = 2|c_k| \cos(k\omega t - \varphi_k) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

Analoghe considerazioni sono valide per le armoniche elementari

$$x(t) = a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$$

Infatti si ha

$$x_k(t) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos k\omega t + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \sin k\omega t \right) = A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

dove

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \cos \varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, \quad \sin \varphi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$$

da cui

$$\tan \varphi_k = \frac{b_k}{a_k} \quad \text{e quindi} \quad \varphi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k} \pm \pi$$

Se si pone

$$\sin \varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, \quad \cos \varphi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$$

si ottiene

$$x(t) = \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Infine si osservi che la posizione precedente relativa a $\sin\varphi_k$ e $\cos\varphi_k$ sono suggerite dal fatto che

$$\left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}\right)^2 + \left(\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}\right)^2 = 1.$$

Le armoniche elementari con l'indicazione esplicita della frequenza si ottengono sostituendo ω con $2\pi f$.

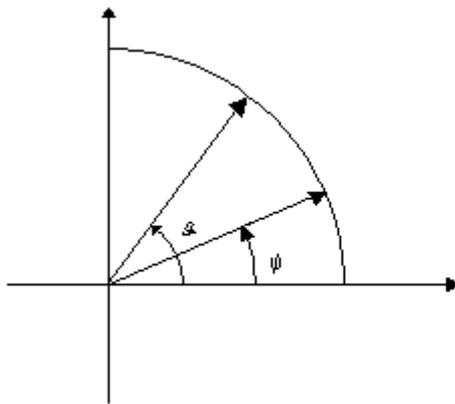
È utile rappresentare un segnale complesso

$$x(t) = A \exp[j(2\pi f t + \varphi)]$$

come un vettore che ruota intorno all'origine nel piano complesso, con velocità angolare costante:

$$\dot{\vartheta} = 2\pi f = \omega \quad \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

φ è detta fase iniziale, rappresenta l'angolo che il vettore forma con l'asse reale al tempo $t = 0$.



$$\vartheta = 2\pi f t + \varphi \quad \dot{\vartheta} = 2\pi f = \omega$$

Le espressioni

$$\|x(t)\|^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad \text{e} \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Sono rispettivamente dette energia e potenza del segnale $x(t)$ calcolate sul periodo T .
Nel caso di un'armonica elementare espressa in forma complessa si ha

$$\|x(t)\|^2 = \|c_k e^{jk\omega t}\|^2 = \int_0^T |c_k e^{jk\omega t}|^2 dt = \int_0^T |c_k|^2 dt = T|c_k|^2$$

da cui $P = |c_k|^2$

Nel caso di un'armonica elementare

$$x(t) = a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$$

si ha

$$\|x(t)\|^2 = \int_0^T |a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t|^2 dt = \frac{1}{2} (|a_k|^2 + |b_k|^2) T$$

$$\text{e} \quad P = \frac{1}{2} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Cominceremo il nostro studio con i concetti di base relativi alle definizioni di alcune proprietà delle funzioni a valori reali.

1. Funzioni continue a tratti

Definiamo il limite sinistro di una funzione ad una sola variabile $f(x)$ in x_0 come il limite finito di $f(x)$ se esiste, per x che tende a x_0 da sinistra, ed è denotato da $f(x_0^-)$:

$$f(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h) \quad \text{con } h > 0 \quad (1.1)$$

Analogamente, il limite destro è definito come

$$f(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \quad \text{con } h > 0 \quad (1.2)$$

(Questo è mostrato in Fig. 1).

Notiamo che se $f(x)$ è continua in x_0 , allora

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

Così, per esempio, la funzione (in Fig. 2)

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ x^2 - \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

ha il limite sinistro $f(1^-) = 1$ e ha il limite destro $f(1^+) = \frac{1}{2}$.

L'ampiezza del salto (discontinuità di prima specie) che accade in $x = 1$ è:

$$f(1^-) - f(1^+) = \frac{1}{2}$$

Fig. 1

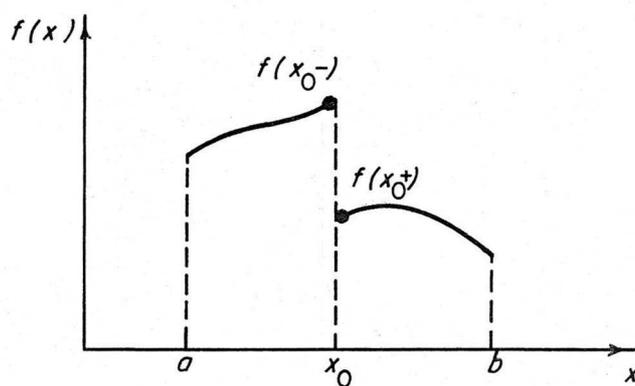


Fig. 2

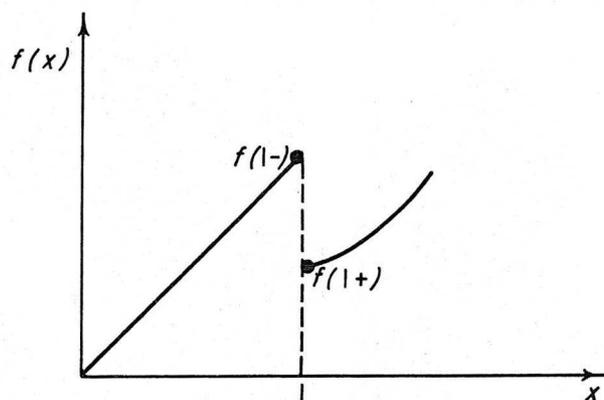
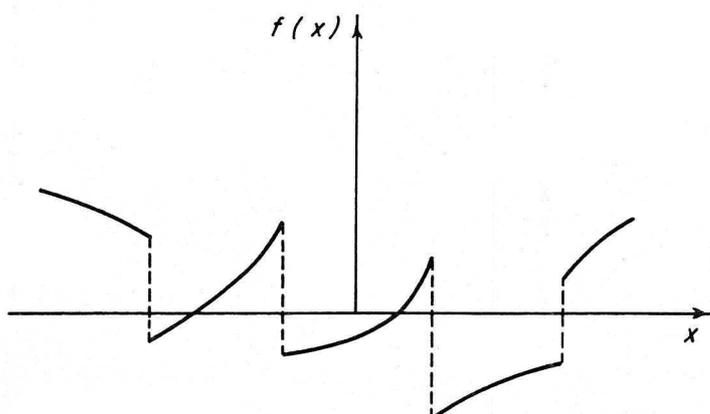


Fig. 3



Una funzione di una sola variabile $f(x)$ è detta continua a tratti (piecewise continuous) in un intervallo $[a, b]$ se esiste un numero finito di punti $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ tale che la $f(x)$ sia

continua nel intervallo $x_j < x < x_{j+1}$ e i limiti unilaterali $f(x_j^+)$ e $f(x_{j+1}^-)$ esistono per ogni $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Una funzione continua a tratti è mostrata nella Fig. 3.

Le funzioni come $1/x$ e $\sin(1/x)$ non sono continue a tratti nell'intervallo chiuso $[0,1]$ perché il limite unilaterale $f(0^+)$ non esiste in ambo i casi.

Se f è continua a tratti in un intervallo $[a,b]$, allora è necessariamente limitata ed integrabile su $[a,b]$.

È facile verificare che il prodotto di due funzioni continue a tratti è una funzione continua a tratti sull'intervallo comune.

Definiamo la derivata sinistra della funzione $f(x)$ in x_0 come:

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0^-) - f(x_0 - h)}{h} \quad (1.3)$$

e la derivata destra della funzione $f(x)$ in x_0 come

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.4)$$

dove h è un incremento positivo .

È chiaro che se f ha la derivata $f'(x)$ in x_0 , allora la derivata sinistra e destra esistono e hanno il valore $f'(x_0)$. L'opposto non è vero.

Per esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases}$$

possiede la derivata sinistra e destra in $x = 0$, i cui valori sono rispettivamente 1 e 0, anche se $f'(0)$ non esiste.

Se f è continua a tratti in un intervallo $[a,b]$ e se in più, la derivata prima f' è continua in ognuno degli intervalli $x_j < x < x_{j+1}$, ed i limiti $f'(x_j^+)$ e $f'(x_{j+1}^-)$ esistono, allora f è detta liscia a tratti (piecewise smooth); se, in più, la derivata seconda f'' è continua in ognuno degli intervalli $x_j < x < x_{j+1}$, ed i limiti $f''(x_j^+)$ e $f''(x_{j+1}^-)$ esistono, allora f è detta molto liscia a tratti.

2. Funzioni pari e dispari

Una funzione $f(x)$ è detta pari (even) se, per ogni x ,

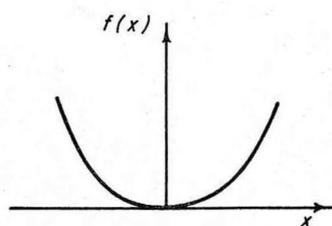
$$f(-x) = f(x) \quad (2.1)$$

È detta dispari (odd) se, per ogni x ,

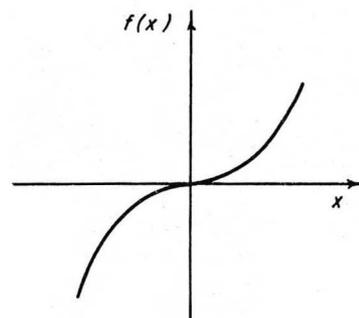
$$f(-x) = -f(x) \quad (2.2)$$

In altre parole, una funzione pari ha il grafico simmetrico rispetto all'asse y , una funzione dispari ha il grafico simmetrico rispetto all'origine (Fig. 4).

Fig. 4



Funzione pari



Funzione dispari

Per esempio, x^2 e $\cos x$ sono funzioni pari mentre x e $\sin x$ sono funzioni dispari.

Comunque, qualunque funzione può essere scritta come la somma di una funzione pari e dispari:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f_e(x) + f_o(x) \quad (2.3)$$

Dove f_e e f_o denotano rispettivamente funzioni pari e dispari.

Per esempio, la funzione e^x non è né pari e né dispari dal momento che $f(-x) = e^{-x}$, ma può essere scritta come

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x + \sinh x$$

Un'applicazione dove la proprietà di simmetria delle funzioni pari e dispari è importante è quella relativa al calcolo degli integrali.

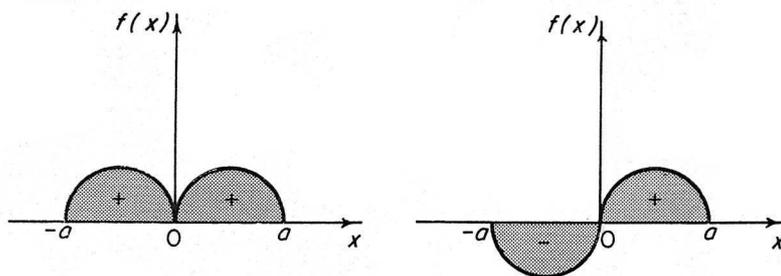
Se $f(x)$ è una funzione integrabile su $[-a, a]$ allora:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{quando } f(x) \text{ è pari} \quad (2.4)$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{quando } f(x) \text{ è dispari} \quad (2.5)$$

Graficamente, come mostrato in fig. 5 l'integrale rappresenta l'area sotto la curva e così per la funzione pari l'intera area è 2 volte l'area sotto la curva che va da 0 ad a , mentre nel caso di funzione dispari l'area negativa sotto la curva da $-a$ a 0 si annulla con l'area sotto la curva da 0 ad a cosicché l'intera area è 0.

Fig. 5



3. Funzioni periodiche

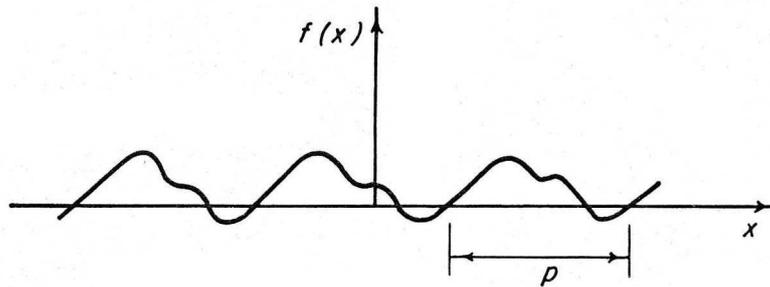
Una funzione continua a tratti $f(x)$ in ogni intervallo $[a, b]$ è detta periodica, se esiste un numero positivo p tale che

$$f(x + p) = f(x) \quad (3.1)$$

per ogni x .

p è chiamato periodo di f , ed il più piccolo valore di p è chiamato periodo fondamentale.

Fig. 6



Se f è periodica con periodo p , allora

$$\begin{aligned}
 f(x+p) &= f(x) \\
 f(x+2p) &= f(x+p+p) = f(x+p) \\
 f(x+3p) &= f(x+2p+p) = f(x+2p) \\
 &\vdots \\
 f(x+np) &= f(x+(n-1)p+p) = f(x+(n-1)p) = f(x)
 \end{aligned}$$

per qualunque numero intero n .

Quindi, per ogni intero n

$$f(x+np) = f(x) \quad (3.2)$$

Si può facilmente dimostrare che se f_1, f_2, \dots, f_k hanno il periodo p e c_k sono delle costanti, allora

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k \quad (3.3)$$

ha periodo p .

Noti esempi di funzioni periodiche sono le funzioni seno e coseno.

Come caso particolare: una funzione costante è una funzione periodica con periodo arbitrario p .

Così, dalla relazione (3.3), la serie

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$$

se converge, evidentemente ha periodo 2π .

Questa serie, che frequentemente si incontrano nei problemi di fisica matematica, saranno studiate successivamente.

Quanto segue figurerà spesso senza ulteriori spiegazioni.

i) Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo p .

Se, per tale funzione, esiste l'integrale (proprio o improprio)

$$\int_0^p f(x) dx$$

allora per ogni numero reale a

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_0^p f(x) dx$$

Ovviamente si ha

$$\begin{aligned} \int_a^{a+p} f(x) dx &= \int_a^p f(x) dx + \int_p^{a+p} f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^{a+p} f(x-p) dx = \\ &= \int_a^p f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^p f(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \int_0^p f(t-x) dt = \int_0^p f(t) dt$$

dove x è un qualsiasi numero reale.

Usando la i) abbiamo:

$$\int_0^p f(t-x) dt = \int_{-x}^{-x+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt$$

4. Ortogonalità

Una successione di funzioni $\{\phi_n(x)\}$ è detta ortogonale rispetto alla funzione peso $q(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ se

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) q(x) dx = 0 \quad m \neq n \quad (4.1)$$

Se poi $m = n$, abbiamo

$$\|\phi_n(x)\| = \left[\int_a^b \phi_n^2 q dx \right]^{1/2} \quad (4.2)$$

La quale è stata chiamata norma del sistema ortogonale $\{\phi_n\}$.

Un sistema ortonormale $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ dove n può essere finito o infinito, che soddisfi la relazione

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) q(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} = S_{m,n} \quad (4.3)$$

è detto ortonormale in $[a, b]$. (Dove il simbolo $S_{m,n}$, è detto Delta di Kroneker).

È evidente che un sistema ortonormale può essere ottenuto da un sistema ortogonale dividendo ogni funzione per la sua norma in $[a, b]$.

Esempio 4.2.

La successione di funzioni

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

forma un sistema ortogonale nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ poiché

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad \forall m, n \quad (4.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$$

per m ed n interi positivi.

Per normalizzare questo sistema, dobbiamo dividere gli elementi del sistema ortogonale originale per la sua norma.

Quindi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

forma un sistema ortonormale.

Una delle più importanti proprietà di un sistema ortogonale è che ognuno è linearmente indipendente.

Ovviamente la stessa proprietà è valida anche per sistemi ortonormali.

5. Serie di Fourier

Noi già abbiamo visto che le funzioni

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

sono mutuamente ortogonali nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e che sono linearmente indipendenti.

Formiamo una serie che formalmente rappresenti la $f(x)$.

Quindi scriviamo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.1)$$

dove il simbolo \square indica che i coefficienti a_0, a_k e b_k dipendono in qualche maniera da f .

La serie può essere convergente oppure no.

Sia $f(x)$ una funzione definita ed integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Consideriamo la somma parziale n-esima

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.2)$$

e proponiamoci di determinare i coefficienti a_0, a_k e b_k in modo che $s_n(x)$ rappresenti la migliore approssimazione della $f(x)$ su $[-\pi, \pi]$ nel senso della media quadratica.

A tale scopo cerchiamo di minimizzare l'integrale

$$I(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \quad (5.3)$$

Una condizione necessaria affinché a_0, a_k e b_k minimizzino il funzionale I è che le derivate parziali prime di I rispetto a questi coefficienti si annullino.

Così, sostituendo l'equazione (5.2) in (5.3) e derivando rispetto ai coefficienti a_0, a_k e b_k otteniamo:

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = - \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] dx \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] \cos kx dx \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] \sin kx dx \quad (5.6)$$

Usando la relazione di ortogonalità della funzione trigonometriche (4.4) e notando che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = 0 \quad (5.7)$$

dove m e n sono numeri interi positivi, le equazioni (5.4), (5.5) e (5.6) diventano

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = \pi a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\pi a_k - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = 2\pi b_k - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (5.10)$$

Poiché questi si devono annullare per avere un valore di estremo, si evince che deve essere

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (5.11)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (5.12)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (5.13)$$

Si osservi che a_0 è un caso particolare di a_k .

Dalle equazioni (5.8), (5.9) e (5.10) segue che

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a_0^2} = \pi \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a_k^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial b_k^2} = 2\pi \quad (5.15)$$

Da cui le derivate miste del secondo ordine e tutte le derivate di ordine superiore si annullano.

Consideriamo la matrice Hessiana associata al funzionale $I(a_0, a_k, b_k)$:

$$H(I) = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Essendo gli autovalori della matrice $H(I)$ positivi ($\lambda_1 = \pi$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2\pi$) si evince che la matrice $H(I)$ è definita positiva, quindi il funzionale $I(a_0, a_k, b_k)$ assume un valore minimo quando i coefficienti a_0, a_k e b_k vengono dati rispettivamente dalle equazioni 5.11-5.13.

Questi sono chiamati coefficienti di Fourier di $f(x)$ e la serie in (5.1) è detta serie di Fourier di $f(x)$.

Si osservi che la possibilità di rappresentare una data funzione $f(x)$ in serie di Fourier non implica che la serie converga a $f(x)$.

Le funzioni

$$\frac{a_0}{2}, a_1 \cos x + b_1 \sin x, a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x, \dots$$

Che figurano al secondo membro della formula (5.1) e verificano le condizioni (5.11)-(5.13) si dicono termini della serie di Fourier per la funzione f (armoniche di f).
L'insieme dei coefficienti di Fourier di una funzione f si chiama spettro.

Osservazione 1

I coefficienti di Fourier (5.11), (5.12) e (5.13) possono essere ottenuti in un modo diverso. Supponiamo che la funzione $f(x)$ di periodo 2π sia sviluppabile in serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.17)$$

Se supponiamo che la serie sia integrabile termine a termine (per fissare le idee supponiamo che la convergenza della serie sia uniforme), allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] dx = \pi a_0$$

da cui

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (5.18)$$

Se moltiplichiamo ambo i termini dell'equazione (5.17) con $\cos nx$ e integriamo da $-\pi$ a π , otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \cos nx dx = \pi a_n$$

ovvero

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (5.19)$$

In un modo simile troviamo che

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (5.20)$$

I coefficienti a_0, a_n e b_n che sono stati trovati sono precisamente gli stessi ottenuti prima.

Osservazione 2

Numerosi processi vibratori in fisica e in discipline tecniche sono descritti mediante funzioni periodiche, di periodo (fondamentale) T ; allora t è il tempo, $y = f(t)$ è l'ordinata di un punto oscillante.

Se f è un polinomio trigonometrico, si dice che: il processo vibratorio $y = f(t)$ si scinde in processi elementari, ossia in oscillazioni armoniche:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

dove $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ e le φ_k sono definite dalle equazioni

$$b_k = \sin \varphi_k, \quad a_k = \cos \varphi_k \quad 0 \leq \varphi_k \leq 2\pi$$

Il parametro $\omega = \frac{2\pi}{T}$ viene detto pulsazione e si misura in radianti al secondo; la frequenza

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ si misura in periodi (cicli) al secondo o Hertz (Hz).

L'armonica

$$A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

ha ampiezza A_k , fase iniziale φ_k e frequenza k volte la frequenza fondamentale $\frac{1}{T}$.

6. Convergenza in media della serie di Fourier. Completezza.

Sia $f(x)$ una funzione continua a tratti e periodica con periodo 2π .

E' ovvio che

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \geq 0 \quad (6.1)$$

dove

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Sviluppando il quadrato si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} [s_n(x)]^2 dx$$

Ma, dalle definizioni dei coefficienti di Fourier (5.11), (5.12) e (5.13) e le relazioni di ortogonalità (4.4) relative alle successione trigonometrica dell'esempio (4.2) si evince

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \quad (6.2)$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right]^2 dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \quad (6.3)$$

di conseguenza

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \geq 0 \quad (6.4)$$

Allora segue che

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (6.5)$$

per tutti i valori di n.

Poiché il membro a destra dell'equazione (6.5) è indipendente da n, otteniamo

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (6.6)$$

nota come **disuguaglianza di Parseval**.

La serie (a termini positivi)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (6.7)$$

essendo crescente e limitata superiormente, è convergente.

La condizione necessaria per la convergenza della serie (6.7) è che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0 \quad (6.8)$$

Si dimostra che la serie di Fourier converge in media quadratica a $f(x)$, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \right]^2 dx = 0 \quad (6.9)$$

Poichè la serie di Fourier converge in media quadratica a $f(x)$, dalla (6.4) segue che

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (6.10)$$

L'uguaglianza precedente è nota come **identità di Parseval**.

Inoltre, se la relazione (6.9) è vera, in quanto l'insieme delle funzioni trigonometriche

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

è detto completo in $L_2(-\pi, \pi)$. (vedi appendice)

7. Serie di coseno e seno

Sia $f(x)$ una funzione pari definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Siccome $\cos kx$ è una funzione pari, e $\sin kx$ è una funzione dispari, la funzione $f(x)\cos kx$ è una funzione pari e la funzione $f(x)\sin kx$ è una funzione dispari.

Così, tenuto conto delle equazioni (2.4) e (2.5) troviamo che i coefficienti di Fourier della $f(x)$ sono:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx & k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = 0 & k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.1)$$

Allora la serie di Fourier di una funzione pari può essere scritta come

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (7.2)$$

dove i coefficienti a_k sono dati dalla formula (7.1).

In maniera simile, se $f(x)$ è una funzione dispari, la funzione $f(x)\cos kx$ è una funzione dispari e la funzione $f(x)\sin kx$ è una funzione pari, pertanto, i coefficienti di Fourier di $f(x)$, in questo caso sono:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Perciò, la serie di Fourier di una funzione dispari può essere scritta come

$$f(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin kx \quad (7.4)$$

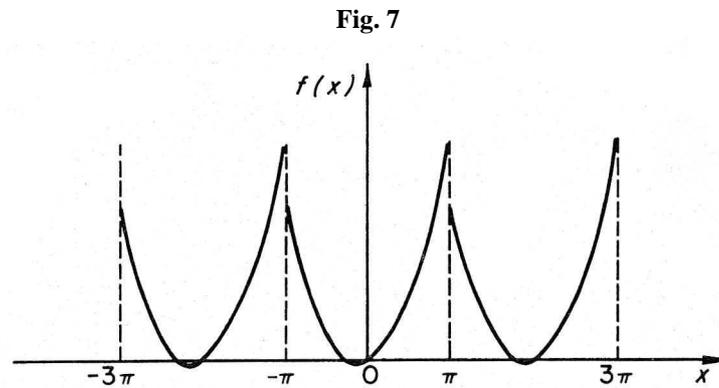
dove i coefficienti b_k sono dati dalla formula (7.3).

8. Esempi

Esempio 8.1.

Trovare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione periodica mostrata in figura 7.

$$f(x) = x + x^2 \quad -\pi \leq x \leq \pi$$



In questo caso è

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) \, dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) \cos kx \, dx = \frac{4}{k^2} (-1)^k$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) \sin kx \, dx = -\frac{2}{k} (-1)^k$$

Quindi lo sviluppo in serie di Fourier per f è

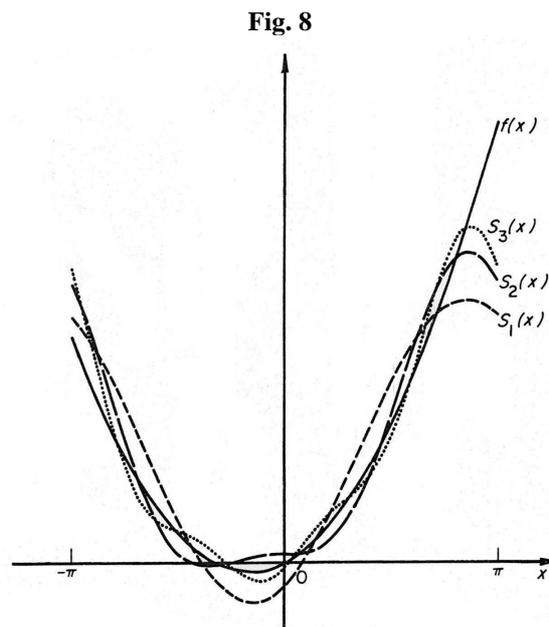
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos kx - \frac{2}{k} (-1)^k \sin kx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + 2 \sin x + \cos 2x - \sin 2x - \dots$$

Le prime due somme parziali sono

$$s_1 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + 2 \sin x$$

$$s_2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + 2 \sin x + \cos 2x - \sin 2x$$

Queste sono rappresentate in figura 8.



Si vede che i primi termini forniscono già una buona approssimazione di f nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$.

L'approssimazione migliora con il numero dei termini presi per una x fissata in $-\pi \leq x \leq \pi$, ma non per $x = \pm \pi$.

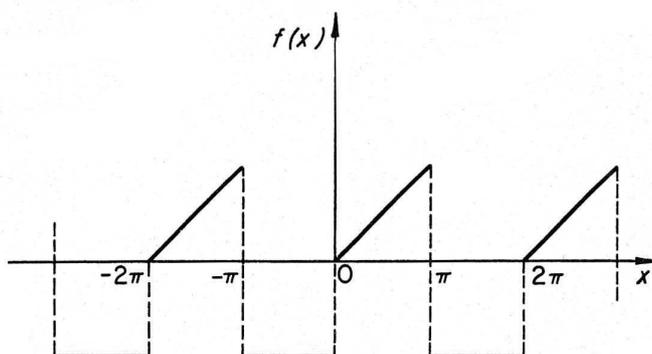
I comportamenti delle approssimazioni nei punti di discontinuità saranno discussi successivamente.

Esempio 8.2.

Consideriamo la funzione periodica mostrata in figura 9.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{se } -\pi < x < 0 \\ x & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Fig. 9



In questo caso abbiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\pi dx + \int_0^{\pi} x dx \right] = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\pi \cos kx dx + \int_0^{\pi} x \cos kx dx \right] = \frac{1}{k^2 \pi} (\cos k\pi - 1) = \frac{1}{k^2 \pi} [(-1)^k - 1]$$

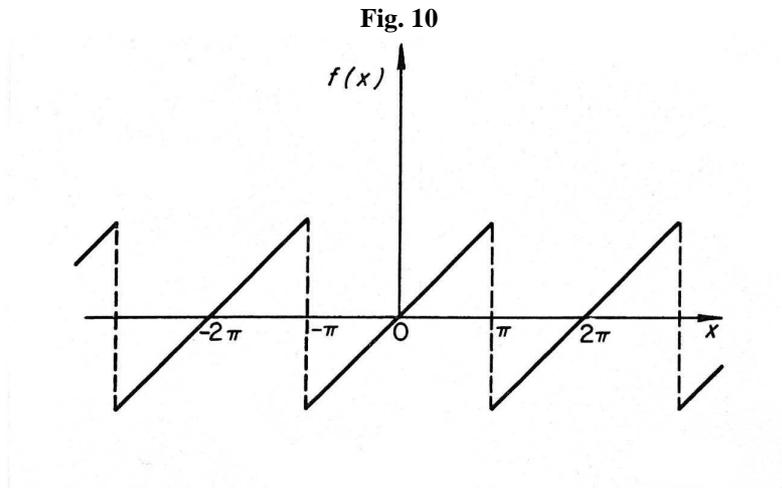
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\pi \sin kx dx + \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right] = \frac{1}{k} (1 - 2 \cos k\pi) = \frac{1}{k} [1 - 2(-1)^k]$$

Quindi la serie di Fourier è

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pi} [(-1)^k - 1] \cos kx + \frac{1}{k} [1 - 2(-1)^k] \sin kx$$

Esempio 8.3.

Consideriamo la funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, in figura 10.



In questo caso è

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = 0 \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots$$

Allora

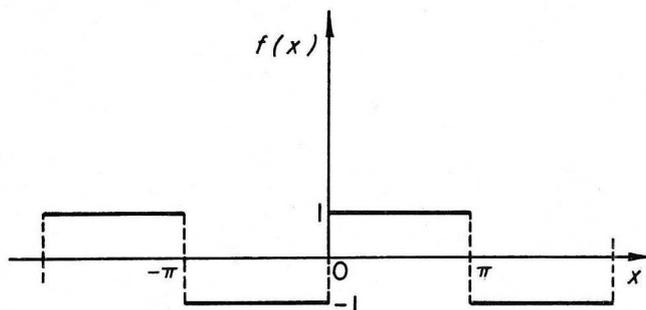
$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$$

Esempio 8.4.

Calcoliamo la serie di Fourier della funzione, detta onda quadra, mostrata in figura 11.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ +1 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Fig. 11



In questo caso f è una funzione dispari così che $a_k = 0$ per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ e

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{2}{k\pi} [1 - (-1)^k] \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots$$

Così $b_{2k} = 0$ e $b_{2k-1} = [4/\pi(2k-1)]$.

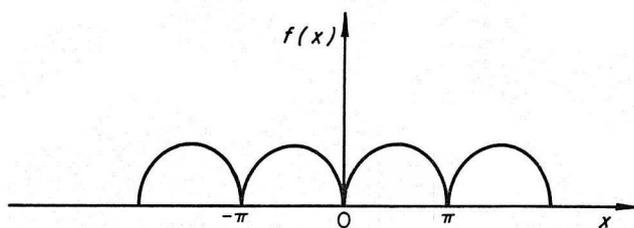
Quindi la serie di Fourier della funzione $f(x)$ è

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)}$$

Esempio 8.5

Sviluppiamo $|\sin x|$ in serie di Fourier. Visto che $|\sin x|$ è una funzione pari come mostrato in figura 12, $b_k = 0$ per $k = 1, 2, \dots$ e

Fig. 12



$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(1+k)x + \sin(1-k)x] \, dx = \frac{2[1+(-1)^k]}{\pi(1-k^2)} \quad \text{per } k = 0, 2, 3, \dots$$

Per $k = 1$, $a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0$.

Allora la serie di Fourier di $f(x)$ è

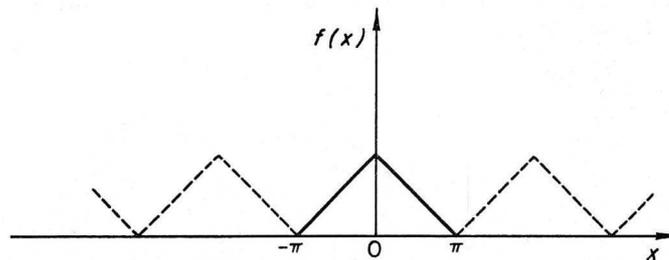
$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(1-4k^2)}$$

In un paragrafo precedente abbiamo definito la funzione $f(x)$ nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ ed assunto $f(x)$ periodica con periodo 2π nell'intero intervallo $(-\infty, \infty)$.

In pratica, frequentemente incontriamo problemi in cui una funzione è definita solamente nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

In questo caso estendiamo la funzione periodicamente con periodo 2π , come in figura 13.

Fig. 13



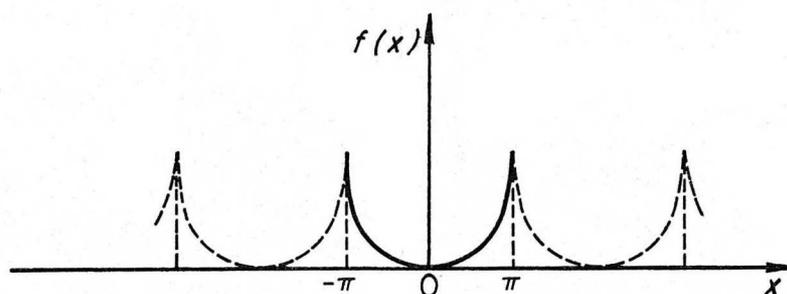
In questo modo possiamo rappresentare la funzione $f(x)$ con lo sviluppo in serie di Fourier, sebbene siamo interessati solamente all'intervallo $(-\pi, \pi)$.

Se una funzione f è definita solo nell'intervallo $(0, \pi)$, possiamo estenderla in due modi.

Il primo è l'*estensione pari* di f , denotata e definita da (vedi figura 14)

$$F_e(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x < \pi \\ f(-x) & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

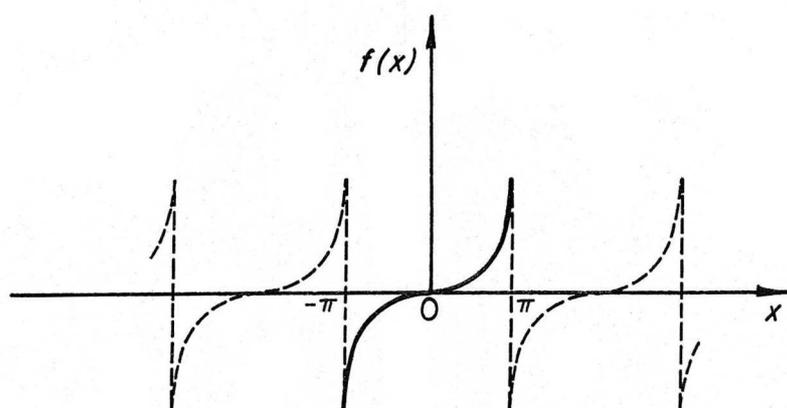
Fig. 14



mentre il secondo è l'espansione dispari di f , denotata e definita da (vedi figura 15)

$$F_o(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x < \pi \\ -f(-x) & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Fig. 15



Visto che $F_e(x)$ e $F_o(x)$ sono rispettivamente funzioni pari e dispari con periodo 2π , gli sviluppi in serie di Fourier di $F_e(x)$ e $F_o(x)$ sono

$$F_e(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx) \quad \text{dove} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

e

$$F_o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \sin kx) \quad \text{dove} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

9. Serie di Fourier complessa

È conveniente qualche volta rappresentare lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione $f(x)$ in forma complessa.

Questo sviluppo può essere dedotto facilmente sostituendo nella serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

le formule

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \left(\frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2} \right) + b_k \left(\frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j} \right) \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_k - jb_k}{2} \right) e^{jkx} + \left(\frac{a_k + jb_k}{2} \right) e^{-jkx} \right] = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{jkx} + c_{-k} e^{-jkx}) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ c_k &= \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)(\cos kx - j \sin kx)] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jkx} dx \\ c_{-k} &= \frac{a_k + jb_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)(\cos kx + j \sin kx)] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{jkx} dx \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo in serie di Fourier in forma complessa è

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx} \quad -\pi < x < \pi \quad (9.1)$$

dove

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jkx} dx \quad (9.2)$$

È importante notare che se f è una funzione reale, allora a_k e b_k sono anch'essi reali e i numeri c_k e c_{-k} benché siano in generale complessi sono reciprocamente coniugati:

$$c_{-k} = \overline{c_k}$$

Viceversa, la coniugazione complessa a due a due di c_k e c_{-k} implica, semplicemente, che i coefficienti di Fourier a_k e b_k della funzione f siano reali, e se ciò ha luogo per tutti i $k = 0, 1, \dots$ la funzione f diventa anch'essa reale.

Evidentemente, l' n -esima somma della serie di Fourier di f

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

può essere scritta nella forma

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jkx}$$

Se, per un dato valore x esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{jkx}$$

si dice che la serie converge nel senso del valore principale.

Se, per un dato valore di x , esiste il limite

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^n c_k e^{jkx}$$

si dice che la serie converge (in questo caso m e n crescono indefinitamente l'uno indipendentemente dall'altro).

Le funzioni complesse

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jkx} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.3)$$

formano un sistema ortonormale in $[0, 2\pi]$ in quanto

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jkx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-jh x} \right] dx = \delta = \begin{cases} 1 & \text{se } k = h \\ 0 & \text{se } k \neq h \end{cases}$$

Poiché le funzioni $\cos kx$ e $\sin kx$ ($k=0,1,2,\dots$) formano un sistema completo in C^* e quindi in L_2^* , della stessa proprietà gode anche il sistema e^{jkx} ($k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$) in quanto

$$\sin kx = \frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j} \quad \text{e} \quad \cos kx = \frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2}$$

I numeri c_k definiti dalla (9.2) sono i coefficienti di Fourier relativi alle funzioni e^{jkx} . In virtù della completezza del sistema (9.3) in L_2^* , per ogni funzione $f \in L_2^*$ si verifica l'uguaglianza di Parseval:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Esempio 9.1.

Determiniamo lo sviluppo in serie di Fourier per $f(x)$ in forma complessa con

$$f(x) = e^x \quad -\pi < x < \pi$$

Abbiamo

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jkx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-jkx} dx = \frac{(1+jk)(-1)^k}{\pi(1+k^2)} \sinh \pi$$

Pertanto la serie di Fourier richiesta è

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(1+jk)(-1)^k}{\pi(1+k^2)} \sinh \pi e^{jkx}$$

Esempio 9.2

Determinare lo sviluppo in serie di Fourier per l'onda quadra in forma complessa.

I coefficienti della serie di Fourier in forma complessa (vedi esempio 8.4) sono:

$$c_0 = a_0 = 0 \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = -j \frac{[(-1)^k - 1]}{k\pi}$$

Pertanto lo sviluppo in serie di Fourier in forma esponenziale, per l'onda quadra è:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} j \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} e^{jkx} \quad k \neq 0$$

10. Cambio di intervallo

Precedentemente ci siamo interessati alle funzioni definite nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

In alcune applicazioni comunque questo intervallo è restrittivo, e l'intervallo d'interesse potrebbe essere arbitrario, diciamo $[a, b]$.

Se introduciamo una nuova variabile t con la trasformazione

$$x = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2\pi}t \quad (10.1)$$

allora l'intervallo $a \leq x \leq b$ diviene $-\pi \leq t \leq \pi$ e la funzione

$$f\left[\frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2\pi}t\right] \equiv F(t)$$

ovviamente ha periodo 2π .

Sviluppando questa funzione in serie di Fourier, otteniamo

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (10.2)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos kt \, dt \quad k = 0, 2, 3, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin kt \, dt \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Cambiando t in x , troviamo lo sviluppo per $f(x)$ in $[a, b]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \frac{k\pi(2x-b-a)}{(b-a)} + b_k \sin \frac{k\pi(2x-b-a)}{(b-a)} \right] \quad (10.3)$$

dove

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{k\pi(2x-b-a)}{(b-a)} \, dx \quad (10.4)$$

$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{k\pi(2x-b-a)}{(b-a)} \, dx \quad (10.5)$$

per ogni k .

Qualche volta è conveniente prendere l'intervallo nel quale la funzione f è definita come $[-l, l]$. Segue dal risultato appena ottenuto che ponendo $a = -l$ e $b = l$, lo sviluppo per f in $[-l, l]$, prende la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (10.6)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \right] dx \quad (10.7)$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \right] dx \quad (10.8)$$

per ogni k

Se f è una funzione pari di periodo $2l$, dall'equazione 10.6 possiamo facilmente determinare che

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} \quad (10.9)$$

dove

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \left[f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \right] dx \quad (10.10)$$

per ogni k .

Se f è una funzione dispari di periodo $2l$, dall'equazione 10.6 lo sviluppo per f è

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (10.11)$$

dove

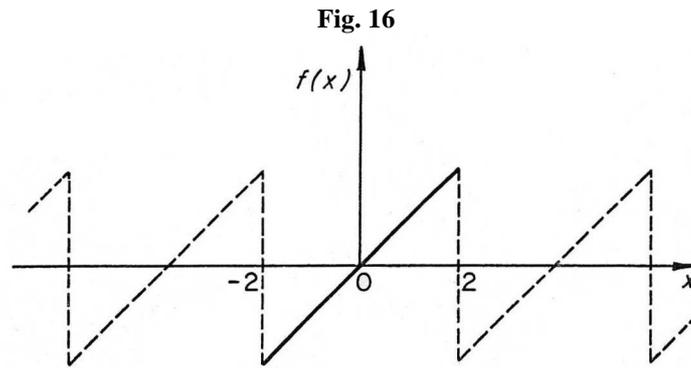
$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \left[f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \right] dx \quad (10.12)$$

Esempio 10.1.

Consideriamo la funzione periodica dispari f

$$f(x) = x \quad -2 < x < 2$$

come mostrato in figura 16.



Qui $l = 2$.

Visto che f è dispari, $a_k = 0$, e

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \left[f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \right] dx = \frac{2}{2} \int_0^2 \left[x \sin \frac{k\pi x}{2} \right] dx = -\frac{4}{k\pi} (-1)^k \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots$$

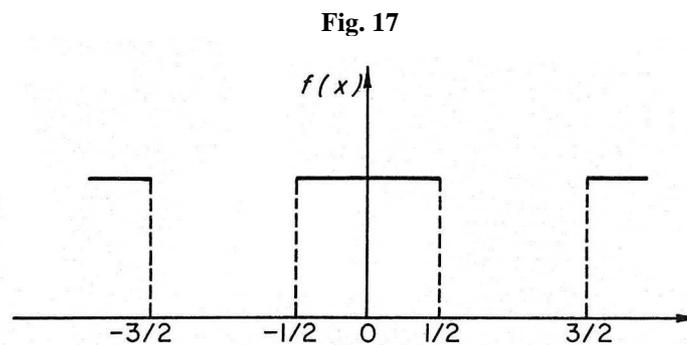
Quindi, la serie di Fourier di f è

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4}{k\pi} (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi x}{2} \right]$$

Esempio 10.2.
 È data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

In questo caso il periodo è $2l = 2$ o $l = 1$.
 Sviluppiamo f come mostrato in figura 17.



Visto che lo sviluppo è pari, abbiamo $b_k = 0$ e

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \left[f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \right] dx = \frac{2}{1} \int_0^1 \left[f(x) \cos k\pi x \right] dx = \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(2k-1)\pi} (-1)^{k-1} \cos(2k-1)\pi x \right]$$

La funzione data (così come quella dell'esempio 8.4) è detta onda quadra.

11. Convergenza puntuale della serie di Fourier

Abbiamo precedentemente affermato che se $f(x)$ è continua a tratti sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, allora esiste uno sviluppo in serie di Fourier che converge in media quadratica a $f(x)$.

In questo paragrafo studieremo la convergenza puntuale.

Iniziamo considerando

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

per ogni k .

Sia $s_n(x)$ la somma parziale n -esima della serie di Fourier della $f(x)$,

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Sostituendo a_k e b_k in $s_n(x)$, otteniamo

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \right] \cos kx + \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \right] \sin kx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt \end{aligned} \tag{11.1}$$

Sommando l'identità trigonometrica

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos ka = \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha$$

da $k=1$ a $k=n$, otteniamo

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ka \right] &= \sin \frac{\alpha}{2} + \left[\sin \frac{3\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right] + \dots + \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \\ &= \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \end{aligned} \quad (11.2)$$

Poi usando la (11.2) nella (11.1) otteniamo

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) \frac{\sin(n+1/2)(t-x)}{2 \sin \left(\frac{t-x}{2} \right)} \right] dt \quad (11.3)$$

Introducendo una nuova variabile $s = t - x$ abbiamo

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \left[f(s+x) \frac{\sin(n+1/2)s}{2 \sin \left(\frac{s}{2} \right)} \right] ds \quad (11.4)$$

Ora, se $f(x)$ è continua a tratti e periodica con periodo 2π , allora anche $s_n(x)$ è periodica con periodo 2π .

Così

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(s+x) \frac{\sin(n+1/2)s}{2 \sin \left(\frac{s}{2} \right)} \right] ds \quad (11.5)$$

La (11.5) è nota come formula di Dirichlet per s_n .

Il nucleo

$$\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)} \quad (11.6)$$

è detto nucleo di Dirichlet, che è periodico con periodo 2π ed inoltre

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)} \right] ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \right] ds = 1 \quad (11.7)$$

LEMMA 11.1 (Riemann-Lebesgue Lemma).

Se $g(x)$ è continua a tratti sull'intervallo $[a, b]$, allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin \lambda x \, dx = 0 \quad (11.8)$$

TEOREMA 11.1 (Teorema di Convergenza Puntuale).

Se $f(x)$ è liscia a tratti e periodica con periodo 2π in $[-\pi, \pi]$, per qualsiasi x

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] \quad (11.9)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

per $k = 0, 1, 2, \dots$

APPENDICE

Sia H un insieme lineare complesso

$$\alpha\varphi + \beta\psi \in H \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C} \quad \text{e} \quad \forall \varphi, \psi \in H,$$

Per prodotto scalare su H si intende un'applicazione che ad ogni coppia di elementi φ e ψ appartenenti ad H fa corrispondere il numero complesso $\langle \varphi, \psi \rangle$, che soddisfa le seguenti proprietà:

- 1) $\langle \varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$;
- 2) $\langle \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2, \psi \rangle = \alpha_1\langle \varphi_1, \psi \rangle + \alpha_2\langle \varphi_2, \psi \rangle$;
- 3) $\langle \varphi, \psi \rangle \geq 0$, $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ se e solo se $\varphi = \vartheta$

Con ϑ elemento nullo di H .

Dalla 1) e 2) si evince che

$$\text{i) } \langle \alpha\varphi, \psi \rangle = \alpha\langle \varphi, \psi \rangle \quad \text{ii) } \langle \varphi, \beta\psi \rangle = \overline{\beta}\langle \varphi, \psi \rangle$$

Non è difficile dimostrare che l'applicazione su H così definita

$$\varphi \longrightarrow \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$$

è una norma (la norma definita dal prodotto scalare). Si dimostra che

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2} \langle \psi, \psi \rangle^{1/2}$$

ovvero

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$$

Esempio 1.

Indichiamo con $C[a,b]$ l'insieme lineare delle funzioni continue

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t) \quad t \in [a,b].$$

Non è difficile verificare che l'applicazione definita nel seguente modo

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t) \bar{y}(t) dt$$

è un prodotto scalare su $C[a,b]$; inoltre

$$i) \quad \langle x(t), x(t) \rangle = \int_a^b x(t) \bar{x}(t) dt = \int_a^b |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|^2$$

$$ii) \quad \langle x(t), y(t) \rangle \leq \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |y(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Un insieme (finito o infinito) di elementi di H :

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots \quad \varphi_k \in H$$

è detto ortogonale se per $k \neq h$ risulta

$$\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = 0$$

Se gli elementi di un insieme ortogonale hanno norma unitaria:

$$\|\varphi_k\| = \sqrt{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} = 1 \quad k = 1, 2, \dots$$

si dice che l'insieme è ortonormale.

Si ha la seguente definizione:

Definizione 1. Un insieme (finito o infinito)

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots$$

di elementi di H si dice **ortonormale** se

$$\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = \delta_{hk} = \begin{cases} 1 & h = k \\ 0 & h \neq k \end{cases}$$

δ_{hk} è detto Delta di Kronecker.

Non è difficile verificare che: Ogni insieme ortonormale (in particolare ortonormale) è linearmente indipendente.

Ovviamente se un insieme

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots$$

di elementi di H è ortogonale ($\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = 0$ con $k \neq h$), l'insieme

$$\frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}, \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|}, \dots$$

è ortonormale.

Esempio 2.

Gli insiemi

$$\{1, \cos kt, \sin kt, \quad k = 1, 2, \dots\}$$

e

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \quad k = 1, 2, \dots \right\}$$

sono rispettivamente, ortogonale ed ortonormale in $C[-\pi, \pi]$.

Esempio 3.

L'insieme $\psi_k = e^{jkt}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ è ortogonale in $C[-\pi, \pi]$. Infatti risulta

$$\langle \psi_k, \psi_h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkt} e^{-jht} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(k-h)t} dt = 2 \int_0^{\pi} \cos k(k-h)t dt$$

da cui

$$\langle \psi_k, \psi_h \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq h \\ 2\pi & k = h \end{cases}$$

ovviamente l'insieme $\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jkt}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ è ortonormale.

Conveniamo che: una serie di elementi di H

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$$

converge nella metrica di H , ad un elemento $f \in H$ se, per l' n -esima somma

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad n = 1, 2, \dots$$

si verifica la relazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0$$

In questo caso si dice che f è la somma di una serie convergente a f nella metrica di H e si scrive

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = f \quad \text{in } H.$$

Dimostriamo l'importante lemma

Lemma. Se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle u_k, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H.$$

Dimostrazione. L'asserto è una conseguenza della disuguaglianza seguente

$$\left| \sum_{k=1}^n \langle u_k, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle \right| = \left| \left\langle \sum_{k=1}^n u_k - f, \varphi \right\rangle \right| \leq \left\| \sum_{k=1}^n u_k - f \right\| \cdot \|\varphi\|$$

Dal lemma precedente si evince

i) se $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k = f$ in H , allora $\alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle$.

ii) se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k = f \quad \text{in } H$$

allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H$$

In particolare, se $\varphi = f$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \overline{\langle f, \varphi_k \rangle} = \langle f, f \rangle$$

ovvero

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = \|f\|^2$$

Esempio 4. L'applicazione che ad ogni coppia di elementi φ e ψ di $L_2(\Omega)$ fa corrispondere il numero complesso

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

dove l'integrale è inteso nel senso di Riemann, integrale improprio assolutamente convergente, è un prodotto scalare su $L_2(\Omega)$.

Definizione. Se

$$\|f_n - f\|_{L_2} = [\langle f_n - f, f_n - f \rangle]^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \longrightarrow 0$$

si dice che f_n converge ad f in media quadratica in $L_2(\Omega)$.

Se $f \in H$ è un elemento qualsiasi, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \approx f$$

è, per definizione, la **serie di Fourier di f rispetto al sistema ortonormale** $\varphi_1, \varphi_2, \dots$; in numeri

$$a_k = \langle f, \varphi_k \rangle$$

sono detti **coefficienti di Fourier**.

Se il sistema è ortogonale allora la serie di Fourier di f e i corrispondenti coefficienti di Fourier si scrivono rispettivamente nel modo seguente

$$f \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \quad a_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \langle f, \varphi_k \rangle$$

Assegnato un elemento $f \in H$, poniamoci il seguente problema:

fra tutti i numeri possibili $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, determinare quelli per i quali il funzionale

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right\|$$

sia minimo.

Dimostriamo che i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, per i quali la norma

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right\|$$

sia minima, sono i coefficienti di Fourier di f . In altre parole si ha

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right\|$$

per ogni N-pla di numeri $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_1^N \alpha_i \varphi_i \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_1^N \alpha_i \varphi_i, f - \sum_1^N \alpha_i \varphi_i \right\rangle = \langle f, f \rangle - \left\langle f, \sum_1^N \alpha_i \varphi_i \right\rangle - \left\langle \sum_1^N \alpha_i \varphi_i, f \right\rangle + \left\langle \sum_1^N \alpha_i \varphi_i, \sum_1^N \alpha_i \varphi_i \right\rangle = \\ &= \|f\|^2 - \sum_1^N [\overline{\alpha_i} \langle f, \varphi_i \rangle + \alpha_i \langle \varphi_i, f \rangle - \alpha_i \overline{\alpha_i}] \end{aligned}$$

si osservi che essendo $\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle = 0 \quad h \neq k$ è

$$\langle \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_N \varphi_N, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_N \varphi_N \rangle = \alpha_1 \overline{\alpha_1} + \dots + \alpha_N \overline{\alpha_N}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_1^N \alpha_i \varphi_i \right\|^2 &= \|f\|^2 - \sum_1^N [\overline{\alpha_i} \langle f, \varphi_i \rangle + \alpha_i \langle \varphi_i, f \rangle - \alpha_i \overline{\alpha_i} - \langle f, \varphi_i \rangle \langle f, \varphi_i \rangle + \langle f, \varphi_i \rangle \langle f, \varphi_i \rangle] = \\ &= \|f\|^2 - \sum_1^N [\overline{\alpha_i} (\langle f, \varphi_i \rangle - \alpha_i) + \overline{\langle f, \varphi_i \rangle} (\alpha_i - \langle f, \varphi_i \rangle)] - \sum_1^N |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_1^N (\alpha_i - \langle f, \varphi_i \rangle) (\overline{\langle f, \varphi_i \rangle} - \overline{\alpha_i}) - \sum_1^N |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \\ &= \|f\|^2 + \sum_1^N |\alpha_i - \langle f, \varphi_i \rangle|^2 - \sum_1^N |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_1^N |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \end{aligned}$$

RIASSUMENDO, risulta

$$\left\| f - \sum_1^N \alpha_i \varphi_i \right\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_1^N |\langle f, \varphi_i \rangle|^2$$

inoltre è

$$0 \leq \min_{\alpha_i} \left\| f - \sum_1^N \alpha_i \varphi_i \right\| = \left(\|f\|^2 - \sum_1^N |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \right)^{1/2}$$

se e solo se $\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle$ cioè se e solo se le $\alpha_i \quad (i = 1, \dots, N)$ sono i coefficienti di Fourier di f .

Da quanto precede, si evince che

$$\sum_1^N |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

da cui:

la serie composta dai quadrati dei moduli dei coefficienti di Fourier dell'elemento $f \in H$ è convergente e verifica la seguente disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2 = (f, f)$$

nota come **disuguaglianza di Parseval per $f \in H$** .

Definizione. Un sistema $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ di elementi di H si dice completo in H se per $f \in H$ e $\forall \varepsilon > 0$ si possono trovare N numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ tali che

$$\left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$$

Enunciamo un importante teorema:

Teorema. Affinchè un sistema ortonormale di elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sia completo in H è necessario e sufficiente che sia soddisfatta una delle seguenti condizioni:

i) La serie di Fourier di un elemento qualsiasi $f \in H$ converge a f nella metrica di H ;

ii) Per ogni elemento $f \in H$ si verifica l'uguaglianza di Parseval

$$\langle f, f \rangle = \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2.$$

Si osservi che la *i)* implica la *ii)*, vedi conseguenze del lemma.

Completiamo questa parte introducendo una definizione ed enunciando un importante teorema relativo ad essa.

Definizione. Un sistema ortonormale è chiuso se, per $\psi \in H$, si verifica che

$$\langle \psi, \varphi_k \rangle = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \Rightarrow \psi = \vartheta \text{ (elemento nullo di } H).$$

Esempio. Un sistema ortonormale completo è chiuso. Infatti sia $f \in H$, se il sistema $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ è completo in H allora, per il teorema precedente è

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2$$

da cui se risulta $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$ per $k = 1, 2, \dots$ segue $\|f\|^2 = 0$ ovvero $f = \vartheta$.

Teorema. Se H è uno spazio lineare completo con prodotto scalare, ossia è uno spazio di Hilbert, allora dalla chiusura del sistema ortonormale $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ne segue la completezza.

In altre parole:

In uno spazio di Hilbert un sistema ortonormale è chiuso se e solo se è completo.

Proprietà della trasformata di Fourier

1. Linearità della trasformata di Fourier. Se $F(\omega)$ e $G(\omega)$ sono le trasformate di Fourier delle funzioni $f(t)$ e $g(t)$ rispettivamente, per qualsiasi costante α e β , la funzione $\alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$ è la trasformata di Fourier della funzione $\alpha f(t) + \beta g(t)$. Quindi la trasformata di Fourier è un operatore lineare. Indicando questo operatore con \mathfrak{F} , si scrive

$$f(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\omega) \quad \text{oppure} \quad \mathfrak{F}[f] = F(\omega).$$

2. Se $F(\omega)$ è la trasformata di Fourier di una data funzione $f(t)$ assolutamente integrabile su tutto l'asse numerico, allora

- i) $F(\omega)$ è continua in $(-\infty, +\infty)$;
- ii) $F(\omega)$ tende a zero per $|\omega| \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} |F(\omega)| = 0 ;$$

iii) $F(\omega)$ è limitata:

$$|F(\omega)| \leq M, \quad -\infty < \omega < +\infty.$$

Dimostrazione

i) La funzione $e^{-j\omega t} f(t)$ è, ovviamente, continua in ω , perciò tenuto presente (vedi osservazione 1) che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt = F(\omega) \quad \omega \in [a, b]$$

su ogni intervallo chiuso $[a, b]$, si evince che $F(\omega)$ è continua su ogni intervallo chiuso dell'asse reale e quindi è continua per ogni ω .

ii) Essendo per ipotesi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

segue che fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, possiamo fissare $A > 0$ tale che

$$\int_{-\infty}^{-A} f(t) dt + \int_A^{+\infty} f(t) dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

quindi (per la disuguaglianza triangolare) è

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{-A}^{+A} e^{-j\omega t} f(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Per completare la dimostrazione, dimostriamo che risulta

$$\left| \int_{-A}^{+A} e^{-j\omega t} f(t) dt \right| < \frac{2}{3} \varepsilon \quad \text{definitivamente rispetto a } |\omega|$$

In virtù dell'integrabilità di f in $[-A, A]$, possiamo fissare una suddivisione T di $[-A, A]$, per esempio

$$T = \{-A = t_0 < t_1 < \dots < t_n = A\} \quad (t_k - t_{k-1}) < 1$$

in corrispondenza della quale la funzione

$$f_T(t) = \begin{cases} M_k = \sup\{f(t); t \in (t_{k-1}, t_k)\} & k = 1, 2, \dots, n \\ 0 & t = t_k \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

soddisfa la disuguaglianza

$$0 \leq \int_{-A}^A [f_T(t) - f(t)] dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

D'altra parte essendo

$$\left| \int_{-A}^A e^{-j\omega t} f_T(t) dt \right| = \left| \sum_{k=1}^n M_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-j\omega t} dt \right| \leq \sum_{k=1}^n |M_k| \frac{2}{|\omega|}$$

si evince che

$$\left| \int_{-A}^A e^{-j\omega t} f(t) dt \right| = \left| \int_{-A}^A e^{-j\omega t} [f(t) - f_T(t) + f_T(t)] dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{|\omega|} \sum_{k=1}^n |M_k| < \frac{2}{3} \varepsilon$$

se

$$|\omega| > \frac{6}{\varepsilon} \sum_{k=1}^n |M_k|.$$

il che comporta la dimostrazione della **ii**).

iii) segue facilmente da

$$|F(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = M \quad -\infty < \omega < +\infty$$

3. Sia $f(t)$ una funzione definita e derivabile m volte su $(-\infty, +\infty)$: $f \in D^{(m)}(-\infty, +\infty)$.

Se si suppone che $f(t)$ e $f^{(k)}(t)$ $k = 1, 2, \dots, m$ siano assolutamente integrabili su $(-\infty, +\infty)$ e che $f(t)$

e $f^{(k)}(t)$ $k = 1, 2, \dots, m-1$ tendono a zero per $|t| \rightarrow +\infty$, allora

$$\mathfrak{S}[f^{(k)}] = (j\omega)^k \mathfrak{S}[f] \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo $k = 1$. Integrando per parti si ottiene

$$\int_{-\eta}^{\eta} e^{-j\omega t} f'(t) dt = e^{-j\omega t} f(t) \Big|_{-\eta}^{\eta} + j\omega \int_{-\eta}^{\eta} e^{-j\omega t} f(t) dt$$

da cui passando al limite per $\eta \rightarrow \infty$ e tenuto presente che

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} e^{-j\omega\eta} f(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} e^{j\omega\eta} f(-\eta) = 0,$$

si evince che

$$\mathfrak{S}[f'] = (j\omega) \mathfrak{S}[f].$$

Da cui

$$\mathfrak{S}[f^{(k)}] = (j\omega) \mathfrak{S}[f^{(k-1)}] = \dots = (j\omega)^k \mathfrak{S}[f]$$

Osservazione 3. In virtù della **ii**) della proprietà **2**, la trasformata di Fourier di $f^{(k)}$ tende a zero per

$|\omega| \rightarrow +\infty$, pertanto dalla proprietà precedente, segue che

$$\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} |\omega|^k |F(\omega)| = \lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \frac{|F(\omega)|}{|\omega|^{-k}} = 0$$

ovvero

$$F(\omega) = o(|\omega|^{-k}) \quad |\omega| \rightarrow +\infty.$$

Quindi se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(t)| dt < +\infty \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

e

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f^{(k)}(t) = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

allora, per qualche costante $c > 0$, si ha

$$|F(\omega)| \leq c(1+|\omega|)^{-k} \quad -\infty < \omega < +\infty.$$

Infatti da $F(\omega)|\omega|^k \rightarrow 0$ quando $|\omega| \rightarrow +\infty$, segue che

$$F(\omega)|\omega|^{k-h} = \frac{1}{|\omega|^h} F(\omega)|\omega|^k \rightarrow 0 \quad \text{per } |\omega| \rightarrow +\infty \text{ e con } h = 0, 1, \dots, k,$$

da cui

$$F(\omega)(1+|\omega|)^k \rightarrow 0 \quad \text{per } |\omega| \rightarrow +\infty.$$

Pertanto, in corrispondenza di $\varepsilon = 1$ esiste $a > 0$ tale che

$$|F(\omega)|(1+|\omega|)^k < 1 \quad \text{per } |\omega| > a.$$

Poiché per $|\omega| \leq a$ la funzione $F(\omega)(1+|\omega|)^k$ è limitata, per qualche $M > 0$ risulta

$$|F(\omega)|(1+|\omega|)^k < M \quad \text{per } |\omega| \leq a.$$

Se $c = \min(1, M)$ si ha

$$|F(\omega)|(1+|\omega|)^k < c \quad -\infty < \omega < +\infty$$

ovvero

$$|F(\omega)| < \frac{c}{(1+|\omega|)^k} \quad -\infty < \omega < +\infty$$

4. Supponiamo che per qualche intero positivo m la funzione $(1+|t|)^m f(t)$ sia assolutamente integrabile su $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^m |f(t)| dt < +\infty \quad (1)$$

Allora la trasformata di Fourier di $f(t)$ ovvero

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt$$

è derivabile m volte e risulta

$$F^{(k)}(\omega) = \frac{d^k}{d\omega^k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} (e^{-j\omega t} f(t)) dt \quad (2)$$

ovvero

$$F^{(k)}(\omega) = (-j)^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} t^k f(t) dt = (-j)^k \mathfrak{S}[t^k f(t)] \quad (3)$$

con $k = 1, 2, \dots, m$

Ovviamente la condizione (1) è verificata se le funzioni $f, tf, \dots, t^k f$ sono assolutamente integrabili. E' vero anche il viceversa.

In particolare:

$$\text{Se } t^k f(t) \in L_1(-\infty, +\infty) \quad \forall k \in N \quad \text{allora} \quad \mathfrak{S}[f] \in C^\infty(\mathfrak{R})$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} (e^{-j\omega t} f(t)) \right| \leq |t|^k |f(t)|$$

(vera per ogni k) e dalla (1) segue, per il criterio di Weierstrass, che l'integrale a destra

nella (2) converge uniformemente rispetto ad $\omega \in [a, b]$ (per ogni intervallo chiuso $[a, b]$).

In virtù del teorema di derivazione sotto il segno, si evince la veridicità della (2) ovvero della (3).

Si osservi che dalla (3) segue che

$$\mathfrak{S}[t^k f(t)] = j^k \mathfrak{S}^{(k)}[f(t)] \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Nell'osservazione 3 è stato evidenziato che l'uguaglianza

$$\mathfrak{S}[f^{(k)}] = (j\omega)^k \mathfrak{S}[f]$$

implica

$$\frac{|\mathfrak{S}[f]|}{|\omega|^{-k}} = |\mathfrak{S}[f^{(k)}]| \rightarrow 0 \quad |\omega| \rightarrow +\infty.$$

Pertanto, **più l'ordine di derivabilità di f su L_1 è grande, più la decrescenza della corrispondente trasformata di Fourier è rapida.** Dalla proprietà 4 si evince che la proposizione duale è ugualmente vera: **più la decrescenza di f all'infinito è rapida, più la corrispondente trasformata di Fourier è liscia.**

Da quanto precede si evince che quando si passa da una funzione f alla corrispondente trasformata di Fourier $F(\omega)$, le proprietà di derivabilità e di decrescenza all'infinito della funzione f si scambiano.

5. Se f, f' e f'' sono assolutamente integrabili in $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(t)| dt < +\infty \quad k = 0,1,2$$

e se f, f' tendono a zero per $|t| \rightarrow \infty$:

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f^{(k)}(t) = 0 \quad k = 0,1$$

allora, per ogni funzione g assolutamente integrabile in $(-\infty, +\infty)$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)G^*(\omega) d\omega \quad (4)$$

dove $F(\omega) = \mathfrak{S}[f]$, $G(\omega) = \mathfrak{S}[g]$, $g^*(t)$ e $G^*(\omega)$ denotano rispettivamente il complesso coniugato di $g(t)$ e $G(\omega)$.

L'uguaglianza (4) è nota come **equazione di Plancherel**. In particolare se $g(t) = f(t)$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (5)$$

la (5) è nota come **identità di Parseval**.

Dimostrazione. Per ogni $t \in (-\infty, +\infty)$ abbiamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega$$

Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza precedente per $g^*(t)$ e integrando rispetto a t tra

$-\lambda$ e $+\lambda$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(t) g^*(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} g^*(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{j\omega t} g^*(t) dt \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-j\omega t} g(t) dt \right]^* d\omega \end{aligned} \quad (6)$$

dove $[]^*$ denota il complesso coniugato dell'espressione in parentesi; il cambio dell'ordine d'integrazione è lecito in quanto l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega$$

converge per il criterio di Weierstrass, uniformemente e assolutamente rispetto a $t \in (-\infty, +\infty)$.

Infatti in virtù delle ipotesi fatte su $f, f' e f''$ (vedi osservazione 3) risulta

$$|F(\omega)| \leq c(1+|\omega|)^{-2} \quad -\infty < \omega < +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|\omega|)^2} d\omega = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(1+\omega)^2} = 2.$$

In virtù della disuguaglianza

$$\left| F(\omega) \left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-j\omega t} g(t) dt \right]^* \right| \leq (1+|\omega|)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$$

l'integrale alla destra della (6) converge, per il criterio di Weierstrass, uniformemente rispetto a

$\lambda \in (-\infty, +\infty)$, pertanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-j\omega t} g(t) dt \right]^* F(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} g(t) dt \right]^* F(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(\omega) F(\omega) d\omega$$

Infine passando al limite per $\lambda \rightarrow +\infty$ nella (6), si ottiene la (4).

6. Traslazione nel tempo: Se $F(\omega) = \mathfrak{S}[f(t)]$ allora

$$\mathfrak{S}[f(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} \mathfrak{S}[f(t)].$$

Esempio. Sia T un numero reale assegnato, allora

i)
$$\mathfrak{S}[u(t) - u(t-T)] = \mathfrak{S}[I_T(t - T/2)] = e^{-j\omega T/2} \mathfrak{S}[I_T(t)] = e^{-j\omega T/2} \frac{2}{\omega} \sin \frac{T}{2} \omega$$

ii) Sia

$$x_0(t) = I_\pi\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - I_\pi\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

allora

$$X_0(\omega) = \left(e^{-j\omega \frac{\pi}{2}} - e^{j\omega \frac{\pi}{2}} \right) \mathfrak{S}[I_\pi(t)] = \left(-2j \sin \omega \frac{\pi}{2} \right) \frac{2}{\omega} \sin \omega \frac{\pi}{2} \quad \omega \neq 0$$

da cui

$$X_0(\omega) = -j \frac{4}{\omega} \sin^2 \frac{\pi}{2} \omega \quad \omega \neq 0$$

$$X_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} X_0(\omega) = 0$$

iii) Sia

$$x_0(t) = t I_2(t-1) = (t-1) I_2(t-1) + I_2(t-1)$$

allora

$$\begin{aligned}
 X_0(\omega) &= e^{-j\omega} \mathfrak{S}[t I_2(t)] + e^{-j\omega} \mathfrak{S}[I_2(t)] = e^{-j\omega} j \frac{d}{d\omega} \mathfrak{S}[I_2(t)] + e^{-j\omega} \frac{2}{\omega} \sin \omega \\
 &= e^{-j\omega} \left(j \frac{2\omega \cos \omega - 2 \sin \omega}{\omega^2} + \frac{2}{\omega} \sin \omega \right) \quad \omega \neq 0 \\
 X_0(0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} X_0(\omega) = 2.
 \end{aligned}$$

iv) Sia

$$\begin{aligned}
 x_0(t) &= \frac{2}{\pi} t I_{\frac{\pi}{2}} \left(t - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{2}{\pi} t I_{\frac{\pi}{2}} \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{\pi} \left(t - \frac{\pi}{4} \right) I_{\frac{\pi}{2}} \left(t - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} I_{\frac{\pi}{2}} \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \\
 &\quad - \frac{2}{\pi} \left(t + \frac{\pi}{4} \right) I_{\frac{\pi}{2}} \left(t + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} I_{\frac{\pi}{2}} \left(t + \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
 X_0(\omega) &= \frac{2}{\pi} \left(e^{-j\omega \frac{\pi}{4}} - e^{j\omega \frac{\pi}{4}} \right) j \frac{d}{d\omega} \mathfrak{S} \left[I_{\frac{\pi}{2}}(t) \right] + \frac{e^{j\omega \frac{\pi}{4}} + e^{-j\omega \frac{\pi}{4}}}{2} \mathfrak{S} \left[I_{\frac{\pi}{2}}(t) \right] \\
 &= \frac{4}{\pi} \sin \omega \frac{\pi}{4} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{2}{\omega} \sin \omega \frac{\pi}{4} \right) + \left(\cos \omega \frac{\pi}{4} \right) \frac{2}{\omega} \sin \frac{\pi}{4} \omega \\
 &= \left[\frac{2}{\pi} \omega \sin \omega \frac{\pi}{2} - 4 \left(1 - \cos \omega \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{1}{\pi \omega^2} \quad \omega \neq 0 \\
 X_0(0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} X_0(\omega) = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

7. Traslazione in frequenza: Se $F(\omega) = \mathfrak{S}[f(t)]$ allora

$$\mathfrak{S}[e^{j\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0).$$

Esempi

i) $\mathfrak{S}[e^{jt} I_T(t)] = \frac{2}{\omega - 1} \sin \frac{T}{2} (\omega - 1)$

ii) $\mathfrak{S}[e^{-jt} I_T(t)] = \frac{2}{\omega + 1} \sin \frac{T}{2} (\omega + 1)$

$$\text{iii) } \mathfrak{S}[I_T(t) \sin t] = \mathfrak{S}\left[\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} I_T(t)\right] = \frac{1}{j} \left[\frac{1}{\omega-1} \sin \frac{T}{2}(\omega-1) - \frac{1}{\omega+1} \sin \frac{T}{2}(\omega+1) \right].$$

In particolare per $T = 2\pi$:

$$\mathfrak{S}[I_{2\pi}(t) \sin t] = \frac{1}{j} \left[\frac{\sin \pi(\omega-1)}{\omega-1} - \frac{\sin \pi(\omega+1)}{\omega+1} \right].$$

Se la trasformata di Fourier è pensata come la risposta in frequenza del segnale $x(t)$, le proprietà di traslazione ci dicono che:

una traslazione nei tempi comporta una moltiplicazione per un'esponenziale complesso nelle frequenze:

$$\mathfrak{S}[x(t-t_0)] = e^{-j2\pi f t_0} X(f).$$

Dualmente una traslazione in frequenza comporta una moltiplicazione per un'esponenziale complesso nei tempi:

$$\mathfrak{S}^{-1}[X(f-f_0)] = x(t) e^{j2\pi f_0 t}.$$

8. Scalatura: L'operazione di scalatura consiste nel moltiplicare la variabile t per un numero reale

a . Il segnale $x(at)$ risulta dilatato per $a < 1$, contratto per $a > 1$.

Se risulta $a < 0$ il segnale oltre a essere dilatato è anche ribaltato nel tempo.

Inoltre la contrazione dell'asse dei tempi corrisponde a una dilatazione dell'asse delle frequenze e viceversa, in quanto

$$\mathfrak{S}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

In particolare è

$$\mathfrak{S}[x(-t)] = X(-f).$$

Infatti nel caso in cui è $a < 0$ si ha

$$\mathfrak{S}[x(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} x(at) dt = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} x(\tau) \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi \frac{f}{a} \tau} x(\tau) d\tau = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Nel caso in cui $a > 0$ si ha

$$\mathfrak{S}[x(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi \frac{f}{a} \tau} x(\tau) \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Esempio

Utilizzeremo la proprietà di scalatura per determinare la trasformata di Fourier del segnale

$$x(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad \sigma > 0$$

noto come **segnale gaussiano**. A tale scopo riscriviamo il segnale nel modo seguente

$$x(t) = \exp\left(-\pi \frac{t^2}{2\pi\sigma^2}\right) = e^{-\pi(at)^2} \quad \text{con } a^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2}$$

Da cui, tenuto presente che

$$\mathfrak{S}\left[e^{-\pi t^2}\right] = e^{-\pi f^2}$$

applicando la proprietà di scalatura si ottiene

$$\mathfrak{S}\left[e^{-\pi(at)^2}\right] = \frac{1}{a} e^{-\pi\left(\frac{f}{a}\right)^2}$$

quindi

$$\mathfrak{S}\left[e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right] = \sigma\sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}.$$

9. Dualità. Dal fatto che le definizioni di trasformata e antitrasformata di Fourier differiscono per un segno all'esponente sotto il segno d'integrale, si evince che

$$\mathfrak{S}[x(t)] = X(f) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{S}[X(t)] = x(-f)$$

oppure

$$\mathfrak{S}[f(t)] = F(\omega) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{S}[F(t)] = 2\pi f(-\omega).$$

Infatti scambiando t con ω in

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega$$

si ottiene

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(t) dt$$

da cui

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} F(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{S}[F(t)]$$

ovvero l'asserto.

Esempio.

i) Essendo

$$\mathfrak{S}\left[\frac{1}{2} I_2(t)\right] = \frac{\sin \omega}{\omega}$$

segue che

$$\mathfrak{S}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = 2\pi \frac{1}{2} I_2(-\omega) = \pi I_2(\omega) = \pi[u(\omega+1) - u(\omega-1)].$$

ii) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$x(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$

Ricordando che

$$\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = X(f) = \mathfrak{S}[I_T(t)]$$

e quindi

$$\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \mathfrak{S}[I_1(t)]$$

dalla proprietà di dualità si evince che

$$\mathfrak{S}\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right] = I_1(-f) = I_1(f) = u\left(f + \frac{1}{2}\right) - u\left(f - \frac{1}{2}\right).$$

In altre parole la trasformata di Fourier del segnale $x(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ è l'impulso rettangolare unitario nell'intervallo di frequenza che va da $f = -\frac{1}{2}$ a $f = \frac{1}{2}$.

10. convoluzione

Applichiamo il teorema di convoluzione alle funzioni

$$\varphi_1(t) = f(t) e^{-j\omega t} \quad e \quad \varphi_2(t) = g(t) e^{-j\omega t}.$$

In virtù del fatto che la convoluzione di queste funzioni vale

$$\varphi_1(t) * \varphi_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\omega u} g(t-u) e^{-j\omega(t-u)} du = e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du = e^{-j\omega t} f(t) * g(t)$$

l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) * \varphi_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(t) dt$$

fornisce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} (f(t) * g(t)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} g(t) dt$$

ovvero

$$\mathfrak{F}[f(t) * g(t)] = \mathfrak{F}[f(t)] \mathfrak{F}[g(t)].$$

In altre parole: la trasformata di Fourier della convoluzione di due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ (dove $f(t)$ e $g(t)$ soddisfano le ipotesi del teorema di convoluzione) è uguale al prodotto delle rispettive trasformate di Fourier.

11. Prodotto. Se $F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)]$ e $G(\omega) = \mathfrak{F}[g(t)]$ allora

$$\mathfrak{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

ovvero

$$\mathfrak{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega - u) G(u) du$$

Infatti, per il teorema di convoluzione e per la proprietà di dualità, risulta

$$\mathfrak{F}[F(-t) * G(-t)] = \mathfrak{F}[F(-t)] \mathfrak{F}[G(-t)] = 2\pi f(\omega) 2\pi g(\omega).$$

Da cui, applicando la proprietà di dualità, si ottiene

$$\mathfrak{F}[4\pi^2 f(t)g(t)] = 2\pi F(\omega) * G(\omega)$$

da cui l'asserto.

Osservazione

Quando un segnale $x(t)$ viene moltiplicato per un altro segnale $y(t)$ si dice che uno dei due segnali modula l'ampiezza dell'altro. Inoltre se

$$X(f) = \mathfrak{F}[x(t)] \quad e \quad Y(f) = \mathfrak{F}[y(t)]$$

allora, procedendo come sopra, abbiamo

$$\mathfrak{F}[x(t)y(t)] = X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f - \eta) Y(\eta) d\eta$$

a parole: La trasformata del prodotto di due segnali è data dalla convoluzione delle loro trasformate (intese come risposte in frequenza).

Questa proprietà viene spesso indicata come **proprietà di modulazione della trasformata di Fourier**.

Se poniamo $z(t) = x(t)y(t)$, ponendo $f = 0$ in

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} z(t) dt \quad e \quad Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f - \eta) Y(\eta) d\eta$$

si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-\eta) Y(\eta) d\eta$$

Da cui, tenuto presente che

$$\mathfrak{F}[y^*(t)] = Y^*(-f)$$

si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\eta) Y^*(\eta) d\eta$$

in particolare se $x(t) = y(t)$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

La relazione precedente, ovvero l' **identità di Parseval** ci dice che:

L'energia del segnale $x(t)$ può essere calcolata integrando, indifferentemente, l'energia per unità di tempo o l'energia per unità di frequenza.

Per questo motivo $|X(f)|^2$ viene detto **densità spettrale di energia del segnale** $x(t)$.

12. Se la successione $\{f_n\}$ di funzioni assolutamente integrabili in $(-\infty, +\infty)$ converge alla funzione f assolutamente integrabile in $(-\infty, +\infty)$, nel senso che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

allora la successione delle loro trasformate di Fourier

$$F_n(\omega) = \mathfrak{F}[f_n(t)]$$

converge uniformemente su tutta la retta reale alla trasformata di Fourier $F(\omega)$ di $f(t)$ cioè

$$F_n(\omega) \xrightarrow{u} F(\omega) \quad -\infty < \omega < +\infty.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dall'evidente disuguaglianza

$$|F_n(\omega) - F(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)| dt.$$

Altri esempi

4. Sia $k > 0$ e

$$f(t) = \begin{cases} e^{-kt} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -e^{kt} & t < 0 \end{cases}$$

allora

$$\mathfrak{F}[f(t)] = -j \frac{2\omega}{k^2 + \omega^2} \xrightarrow{|\omega| \rightarrow \infty} 0$$

Infatti, essendo $f(t)$ dispari è $-f(-t) = f(t)$, si ha

$$\mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} -j e^{-kt} \sin \omega t dt = -j \frac{2\omega}{k^2 + \omega^2}.$$

Inoltre risulta

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \left(-j \frac{2\omega}{k^2 + \omega^2} \right) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{k^2 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} e^{-kt} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -e^{-kt} & t < 0 \end{cases}$$

In virtù dell'identità di Parseval si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2 + k^2)^2} d\omega = \frac{1}{k} \frac{\pi}{4}.$$

Infatti è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2kt} dt = \frac{1}{k}$$

quindi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2 + k^2)^2} d\omega = \frac{1}{k}.$$

Si osservi che

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2 + k^2)^2} d\omega = \frac{2}{\pi} 2\pi j \operatorname{Re} s F(jk) = 4j \frac{1}{4jk} = \frac{1}{k}$$

Dove

$$\operatorname{Re} s F(jk) = \lim_{\omega \rightarrow jk} \frac{d}{d\omega} \left[\frac{\omega^2}{(\omega^2 + k^2)^2} (\omega - jk) \right] = \lim_{\omega \rightarrow jk} \frac{d}{d\omega} \frac{\omega^2}{(\omega^2 + k^2)^2} = \frac{1}{4jk}.$$

5. Sia $f(t) = e^{-k|t|}$ $k > 0$.

Allora

$$\mathfrak{S}[e^{-k|t|}] = \frac{2k}{k^2 + \omega^2}.$$

Infatti

$$\mathfrak{S}[e^{-k|t|}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-k|t|} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-kt} \cos \omega t dt = \frac{2k}{k^2 + \omega^2}.$$

Inoltre risulta

$$e^{-k|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \frac{2k}{k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{k}{k^2 + \omega^2} \cos \omega t d\omega$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2k} e^{-k|t|} \quad t \in (-\infty, +\infty) e k > 0.$$

Segue che

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(k^2 + \omega^2)} = \frac{\pi}{4k^3} \quad k > 0.$$

Si osservi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(k^2 + \omega^2)^2} = 2\pi j \operatorname{Re} s F(jk) = \frac{\pi}{2k^3}$$

$$\operatorname{Re} s(jk) = \lim_{\omega \rightarrow jk} \frac{d}{d\omega} \frac{1}{(\omega + jk)^2} = + \frac{2}{8jk^3}$$

6. Sia

$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

allora

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}[f(t)] = F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt = 2 \int_0^1 (1-t^2) \cos \omega t dt = 2 \left[(1-t^2) \frac{\sin \omega t}{\omega} \Big|_0^1 + \frac{2}{\omega} \int_0^1 t \sin \omega t dt \right] = \\ &= \frac{4}{\omega} \left[-t \frac{\cos \omega t}{\omega} \Big|_0^1 + \frac{1}{\omega} \frac{\sin \omega t}{\omega} \Big|_0^1 \right] = \frac{4}{\omega^3} (\sin \omega - \omega \cos \omega). \end{aligned}$$

Inoltre da

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega^3} (\sin \omega - \omega \cos \omega) d\omega$$

segue che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3} \cos \frac{\omega}{2} d\omega = \frac{\pi}{4} \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \pi$$

Infine l'identità di Parseval fornisce la relazione seguente

$$2 \int_0^1 (1-t^2) dt = \frac{8}{\pi} 2 \int_0^{+\infty} \frac{(\omega \cos \omega - \sin \omega)^2}{\omega^6} d\omega$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\omega \cos \omega - \sin \omega)^2}{\omega^6} d\omega = \frac{\pi}{15}.$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI SEGNALI DISCRETI

Quando all'ingresso di un sistema discreto si applica la sequenza di esponenziali complessi

$$x_n = x(nT) = e^{j2\pi f nT}$$

la risposta (l'uscita) y_n del sistema è data dalla somma di convoluzione tra il segnale d'ingresso x_n e la risposta all'impulso h_n :

$$y_n = x_n * h_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{j2\pi f T(n-k)}$$

da cui

$$y_n = y(nT) = e^{j2\pi f nT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-j2\pi f T k}$$

a parole: **La risposta del sistema è data dal prodotto del segnale d'ingresso per il numero complesso**

$$H(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-j2\pi f T k}$$

Da cui: L'uscita è un esponenziale complesso con la stessa frequenza f dell'ingresso ma con fase iniziale φ ed ampiezza A differente; è

$$y_n = x_n A e^{j\varphi} = A e^{j(2\pi f T n + \varphi)}$$

Al variare di f tra $-\infty$ e $+\infty$, la funzione complessa

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n e^{-j2\pi f T n}$$

che *caratterizza il sistema nel dominio delle frequenze* prende il nome di *trasformata di Fourier della sequenza h_n* .

In generale

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-j2\pi f T n}$$

prende il nome di **trasformata di Fourier della sequenza** $x_n = x(nT)$.

La trasformata di Fourier di un segnale discreto è una funzione continua e periodica di periodo $1/T$

in f . Inoltre ha la stessa forma dello sviluppo in serie di Fourier del segnale continuo $X(f)$

periodico e di periodo $1/T$ in f . Pertanto i campioni x_n della sequenza non sono altro che i

coefficienti di Fourier definiti dalla relazione

$$x_n = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f) e^{j2\pi f T n} df$$

La relazione precedente è detta **trasformata inversa di Fourier** oppure **antitrasformata di Fourier**

di una sequenza, essa esprime la sequenza in funzione della sua trasformata.

Proprietà

1. Valore nell'origine.

i) La trasformata in $f = 0$ è uguale alla somma dei campioni della sequenza:

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n$$

ii) Il valore del campione in $n = 0$, cioè x_0 è dato dal prodotto di T per l'integrale della trasformata calcolata su un periodo :

$$x_0 = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f) df$$

2. Traslazione.

i) $\mathfrak{F}[x_{n-n_0}] = e^{-j2\pi f T n_0} X(f)$

ii) $\mathfrak{F}[e^{j2\pi f_0 T n} x(n)] = X(f - f_0)$

- i) Una traslazione nei tempi comporta una moltiplicazione per un esponenziale complesso nelle frequenze.
- ii) Una traslazione nelle frequenze comporta una moltiplicazione per un esponenziale complesso nei tempi.

3. Modulazione.

La trasformata del prodotto di due sequenze $z_n = x_n y_n$ è data dalla convoluzione, calcolata su un solo periodo, delle trasformate $X(f)$ e $Y(f)$:

$$Z(f) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\varphi) Y(f - \varphi) d\varphi$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}[x_n y_n] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_n e^{-j2\pi f T n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\varphi) e^{j2\pi\varphi T n} d\varphi y_n e^{-j2\pi f T n} = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\varphi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{-j2\pi(f-\varphi)T n} d\varphi = \\ &= T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\varphi) Y(f - \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

L'espressione

$$Z(f) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\varphi) Y(f - \varphi) d\varphi$$

è detta **convoluzione circolare** o **periodica** e sarà indicata con il simbolo \otimes :

$$Z(f) = X(f) \otimes Y(f).$$

4. Densità spettrale di energia.

Se $X(f) = \mathfrak{S}[x_n]$ allora l'energia della sequenza x_n si può calcolare sia sommando i quadrati dei moduli dei campioni della sequenza sia moltiplicando per T l'integrale del quadrato del modulo della trasformata calcolata su un solo periodo. In altre parole sussiste la relazione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 = T \int_{-1/2T}^{1/2T} |X(f)|^2 df .$$

Per dimostrare ciò, poniamo $z_n = x_n y_n$. Allora

$$\text{i) } Z(f) = \mathfrak{S}[z_n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_n e^{-j 2\pi f T n}$$

$$\text{ii) } Z(f) = \mathfrak{S}[x_n y_n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\varphi) Y(f - \varphi) d\varphi$$

da cui ponendo $f = 0$ si ottiene

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_n = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f) Y(-f) df .$$

Tenuto presente che $\mathfrak{S}[y_n^*] = Y^*(-f)$, la relazione precedente assume la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_n^* = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f) Y^*(f) df$$

da cui, se $y_n = x_n$ segue l'asserto.