TRASFORMATA DI LAPLACE

1. Introduzione.

In questo capitolo studieremo un operatore integrale noto come la trasformata di Laplace.
Prima di descrivere tale operatore integrale premettiamo alcune definizioni.
Una funzione F si dice ***continua a tratti*** in [a,b] se è definita e continua in [a,b], ad eccezione, al più, di un numero finito di punti

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$$

in cui esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_i^+} F(x) = F(x_i^+) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_i^-} F(x) = F(x_i^-)$$

Ovviamente in $x = a$ ed in $x = b$ hanno senso soltanto $F(a^+)$ e $F(b^-)$ rispettivamente.
In questo senso una funzione continua a tratti in [a,b] è continua in ciascuno degli intervalli (x_i, x_{i+1}). Per di più, indipendentemente dal fatto che F sia definita o meno nei punti x_i ed x_{i+1} la si può ivi ridefinire in modo da renderla continua in $[x_i, x_{i+1}]$.

Una funzione F si dice ***regolare a tratti*** se è continua a tratti ed ha derivata F' continua a tratti, in $[a, b]$; in altre parole se esiste una suddivisione finita di [a , b] :

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

in corrispondenza della quale F risulti di classe C^1 in (x_i, x_{i+1}), inoltre esistono finiti i limiti $F(x_i^+)$, $F(x_{i+1}^-)$, $F'(x_i^+)$, $F'(x_{i+1}^-)$.
Se F è continua in $[a, b]$ ed ha derivata F' continua a tratti in $[a, b]$, diremo che F è ***continua e regolare a tratti.***
Premesso ciò, ricordiamo che se F è una funzione continua a tratti in [a,b] con discontinuità in

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$$

allora F è integrabile su [a , b] e

$$\int_a^b F'(t)\,dt = \lim_{h \to 0^+} \left[\int_{a+h}^{x_0 - h} F(t)\,dt + \int_{x_0+h}^{x_1 - h} F(t)\,dt + \ldots + \int_{x_n+h}^{b-h} F(t)\,dt \right]$$

inoltre valgono i seguenti teoremi:

TEOREMA 1.1.
Sia F una funzione continua su [a , b] e derivabile in (a , b). Se F' è continua in (a, b) e integrabile su [a , b] allora:

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) .$$

Dimostrazione.
Sia

$$f(x) = \int_a^x F'(t)dt \qquad \forall\, x \in [a,b] .$$

Essendo f continua su [a , b], derivabile in (a , b) con $f' = F'$, segue che la funzione $f - F$ continua su [a , b] è costante su (a , b) e quindi, per continuità, su [a, b].
In particolare è

$$F(b) - f(b) = F(a) - f(a)$$

da cui, essendo $f(a) = 0$, si evince l'asserto:

$$F(b) - F(a) = f(a) = \int_a^b F'(t)dt \quad .$$

TEOREMA 1.2.
Sia F una funzione continua e regolare a tratti su [a , b], allora

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione.
Supponiamo che F non sia derivabile nei punti

$$a = x_o < x_1 < ... < x_n = b$$

allora per definizione è

$$\int_a^b F'(t)dt = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F'(t)dt$$

da cui, tenuto presente che per il teorema precedente è

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} F'(t)\, dt = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

si evince che

$$\int_a^b F'(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n-1} \left[F(x_i) - F(x_{i-1}) \right] = F(b) - F(a).$$

TEOREMA 1.3.
Se F e G sono due funzioni continue e regolari a tratti in [a , b] allora vale la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b F(t)\, G'(t)\, dt = F(t)\, G'(t) \Big|_a^b - \int_a^b F'(t)\, G(t)\, dt$$

Dimostrazione.
Ovviamente la funzione FG è continua e regolare a tratti in [a , b], pertanto ad eccezione di un numero finito di punti è

$$\big(F(t)\;\; G(t) \big)' = F(t)\, G'(t) + F'(t)\, G(t)$$

da cui, tenuto presente, il teorema precedente e che la funzione FG' e $F'G$ sono integrabili, si evince l'asserto.
In questo contesto saremo interessati a funzioni continue a tratti su ogni intervallo finito [0 , b] per ogni b > 0, per brevità diremo che tali funzioni sono continue a tratti su [0 , +∞).
Saremo interessati anche a funzioni continue e regolari a tratti cioè con derivata continua a tratti su [0 , +∞).

TEOREMA 1.4.

Sia F(t) una funzione continua a tratti su [0,+∞]. Se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} F(t) dt$$

converge, allora la funzione

$$v(t) = \int_0^t e^{-s_0 t} F(u) du$$

è limitata su [0,+∞).

Dimostrazione.
Per ipotesi esiste finito il limite di v(t) per $t \to +\infty$. Sia

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \int_0^{+\infty} e^{-s_0 u} F(u) du = f(s_0)\,.$$

L'asserto segue osservando che:

i) esiste $t_0 > 0$ tale che

$$|v(t)| \le 1 + |f(s_0)| \qquad \forall t \ge t_0 > 0;$$

ii) essendo v(t) continua su [0, t_0] esiste k > 0 tale che

$$|v(t)| \le k \qquad \forall t \in [0, t_0]\,.$$

2. Funzioni di ordine esponenziale

DEFINIZIONE 2.1.

Una funzione F è di ordine esponenziale su $[0, +\infty)$ se esistono due costanti $C > 0$ ed $\alpha > 0$ tali che

$$|F(t)| \leq C\, e^{\alpha t} \qquad \forall\, t \geq 0$$

In particolare le funzioni limitate sono di ordine esponenziale in quanto

$$|F(t)| \leq C \quad \forall\, t \geq 0 \qquad \text{implica} \quad |F(t)| \leq C\, e^{t} \quad \forall\, t \geq 0 \quad .$$

Sono di ordine esponenziale anche le funzioni per le quali risulta

$$|F(t)| \leq C\, e^{\alpha t} \quad \text{per qualche } \alpha < 0 \text{ e } C > 0$$

Infatti tali funzioni sono limitate su $[0, \infty)$:

$$|F(t)| \leq C\, e^{\alpha t} \leq C \qquad \forall t \geq 0.$$

Osservazioni.

Sia F una funzione continua a tratti su $[0, +\infty)$:

1. Se per qualche **$C > 0$** e **$\alpha > 0$** risulta:

$$|F(t)| \leq C\, e^{\alpha t} \qquad \forall t > t_0 > 0$$

allora F è di ordine esponenziale su $[0, \infty)$. Infatti dalla relazione precedente e da

$$|F(t)| \leq \sup \left\{ |F(t)|,\ t \in [0, t_0] \right\} = M \leq M\, e^{t}$$

segue che

$$|F(t)| \leq k\, e^{a t} \qquad \forall t \geq 0$$

dove $k = \max(C, M)$ ed $a = \max(\alpha, 1)$.

2. Se per qualche $\alpha > 0$ è

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{F(t)}{e^{\alpha t}} = 0$$

allora F è di ordine esponenziale.

Segue dalla 1 ; infatti esiste t_0 tale che:

$$|F(t)| \leq e^{\alpha t} \qquad \forall t > t_0 > 0 .$$

Pertanto le funzioni $1, t^n, \sin t, \cos t$, sono funzioni continue di ordine esponenziale su $[0,+\infty)$.

3. Se

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{F(t)}{e^{\alpha t}} = \infty \qquad \forall \alpha \in \Re$$

allora F non è di ordine esponenziale.
Da cui le funzioni e^{t^2} e $t^t = e^{t \ln t}$ non sono di ordine esponenziale.

4. Se F è di ordine esponenziale su $[0 , +\infty)$, allora

$$G(t) = \int_0^t F(u)\, du$$

è di ordine esponenziale su $[0 , +\infty)$. Infatti per qualche $C > 0$ e $\alpha > 0$ è

$$|G(t)| \leq \int_0^t |F(u)|\, du \leq C \int_0^t e^{\alpha u}\, du = \frac{C}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right) < \frac{C}{\alpha} e^{\alpha t} .$$

5. Sia F una funzione continua e regolare a tratti in $[0 , +\infty)$ la cui derivata F' è di ordine esponenziale:

$$|F'(t)| \leq C\, e^{\alpha t}$$

per qualche $C > 0$ e $\alpha > 0$. Allora F è di ordine esponenziale.
Infatti da

$$-C\, e^{\alpha t} \leq F'(t) \leq C\, e^{\alpha t}$$

segue che

$$-C \int_0^t e^{\alpha u}\, du \leq F(t) - F(0) \leq C \int_0^t e^{\alpha u}\, du$$

da cui

$$|F(t) - F(0)| \leq \frac{C}{\alpha} e^{\alpha t}$$

e, quindi,

$$|F(t)| \leq k\, e^{\alpha t} \qquad \forall t > 0$$

dove $k = \dfrac{C}{\alpha} + |F(0)|$.

6. Se F è di ordine esponenziale su $[0 , +\infty)$ allora:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-st} F(t) = 0$$

definitivamente rispetto ad s.

3. Definizione di trasformata di Laplace.

Definizione 3.1.
Sia f una funzione definita su $[0,+\infty)$ e consideriamo l' integrale improprio dipendente dal parametro $s \in \Re$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \underset{\text{def}}{=} \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t)dt$$

quando f è sufficientemente regolare, l' integrale precedente converge per determinati valori di s, in tal caso definisce una funzione $F(s)$ detta **Trasformata di Laplace di f**, che si indica anche con $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Non è difficile verificare che:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} \qquad s > 0$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{+\infty} t\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^2} \qquad s > 0$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, t^n\, dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad n = 1,2,... \qquad s > 0$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen }\omega t\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin \omega t\, dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos \omega t\, dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, e^{at}\, dt = \frac{1}{s-a} \qquad s > a$$

Teorema 3.1

Sia *f(t)* una funzione continua a tratti. Se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

converge per $s = s_0$, allora converge anche per $s > s_0$.

Dimostrazione.

Da

$$\int_0^b e^{-st} f(t)dt = \int_0^b e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t)dt$$

integrando per parti si ottiene

$$\int_0^b e^{-st} f(t)dt = v(b)e^{-(s-s_0)b} + (s-s_0)\int_0^b e^{-(s-s_0)t} v(t)dt$$

dove v(t) è la funzione definita nel teorema 1.4. Essendo

$$\mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-\mathrm{s}_0)\mathrm{t}}\left|\mathrm{v(t)}\right| \leq \mathrm{Me}^{-(\mathrm{s}-\mathrm{s}_0)\mathrm{t}} \qquad \mathrm{M} = \sup\left\{\left|\mathrm{v(t)}\right|,\ \mathrm{t} > 0\right\}$$

si evince che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} v(t)dt$$

converge per ogni $s > s_0$. Infine osservato che

$$\lim_{b\to+\infty} v(b)e^{-(s-s_0)b} = 0 \qquad \forall s > s_0$$

segue che

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt = (s-s_0)\int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} v(t)dt \qquad \forall s > s_0$$

cioè l'asserto.

Possiamo dire che se una funzione *f(t)* continua a tratti è L-trasformabile (cioè esiste $\mathscr{L}\{f(t)\}$) la corrispondente trasformata di Laplace risulta definita in un intervallo del tipo $(h,+\infty)$ dove *h*, eventualmente uguale a $-\infty$, è completamente determinato dalla funzione *f(t)*.
Tale numero *h* è detto *ascissa di convergenza* se:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \quad \begin{cases} diverge \forall s < h \\ converge \forall s > h \end{cases}$$

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza della trasformata di Laplace.

TEOREMA 3.2.
Se F è una funzione continua a tratti di ordine esponenziale, esiste un $a \in \Re$ tale che:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, f(t)\, dt$$

converge per ogni s > a in altre parole esiste $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$; inoltre risulta

$$\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0 \quad .$$

Dimostrazione.
Per ipotesi esistono due costanti C > 0 e $\alpha > 0$, tali che

$$\left|f(t)\right| \le C\, e^{\alpha t}$$

pertanto è

$$\left|e^{-st}\, f(t)\right| \le C\, e^{-(s-\alpha)t} .$$

Da cui, tenuto presente che

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}\, dt = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \forall\, s > \alpha$$

si evince l'asserto.

Si osservi che l'insieme delle funzioni che ammettono la trasformata di Laplace è più grande dell'insieme delle funzioni continue a tratti di ordine esponenziale su $[0 , +\infty)$.
Infatti la funzione $\frac{1}{\sqrt{t}}$ ammette trasformata di Laplace anche se non è di ordine esponenziale:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{s}\, x\right)^2} d\sqrt{s}\, x = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \qquad s > 0 \quad .$$

4. Proprietà della trasformata di Laplace.

I seguenti teoremi mostrano che per il calcolo della trasformata di Laplace di una data funzione esistono metodi più facili di quello suggerito dalla definizione.

Teorema 4.1.
Se esiste la trasformata di Laplace delle funzioni *f* e *g* allora per ogni a e b $\in \Re$ esiste la trasformata di Laplace della funzione a*f*+b*g* e risulta:

$$\mathscr{L}[af + bg] = a\mathscr{L}[f] + b\mathscr{L}[g].$$

In altre parole, l'operatore $\mathscr{L}$ è lineare.

Esempi.

1. $\mathscr{L}[\cos(t + a)] = \mathscr{L}[\cos(t)\cos(a) - \sin(t)\sin(a)] = \dfrac{1}{1 + s^2}(s\cos(a) - \sin(a))$

2. $\mathscr{L}[\sin^3 t] = \mathscr{L}\left[\dfrac{3}{4}\sin(t) - \dfrac{1}{4}\sin(3t)\right] = \dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{1}{4}\,\dfrac{9}{s^2+9}$

3. $\mathscr{L}[\cos^3 t] = \mathscr{L}\left[\dfrac{3}{4}\cos(t) + \dfrac{1}{4}\cos(3t)\right] = \dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{s}{s^2+9}$.

4. $\mathscr{L}[\sinh at] = \mathscr{L}\left[\dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-a} - \dfrac{1}{s+a}\right) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$

5. . $\mathscr{L}[\cosh at] = \mathscr{L}\left[\dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-a} - \dfrac{1}{s+a}\right) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

Si osservi che è

$\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$. $\qquad\qquad$ $\cos(3t) = -3\cos t + 4\cos^3 t$.

Teorema 4.2.

Se esiste la trasformata di Laplace di f: $\mathscr{L}[f] = F(s)$ allora, per ogni a$\in\Re$, risulta

$$\mathscr{L}[e^{at}\,F(t)] = f(s - a)\ .$$

Dimostrazione.

$$\mathscr{L}\left[e^{at}f(t)\right]=\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t)dt = F(s-a).$$

Il risultato espresso dalla (3-1) è noto come "***il primo teorema del ritardo***", e può essere scritto in termini di trasformata inversa come

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F(s-a)\right]=e^{as}f(t)$$

Dove ovviamente è f(t)= $\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right]$.

Esempi :

1. Dato che $\mathscr{L}[1]=\frac{1}{s}$, si ha

$$\mathscr{L}[\,e^{at}\,]=\frac{1}{s-a} \quad ; \quad \mathscr{L}[\,e^{-at}\,]=\frac{1}{s+a}$$

2. Dato che $\mathscr{L}[\,t^n\,]=\frac{n!}{s^{n+1}}$, si ha

$$\mathscr{L}[\,e^{at}\,t^n]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\ ;\ \mathscr{L}[e^{-at}\,t^n]=\frac{n!}{(s+a\ )^{n+1}}$$

3. Dato che $\mathscr{L}[\,\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ e $\mathscr{L}[\,\cos\omega t\,]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$, si ha

$$\mathscr{L}[\,e^{at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \quad ; \quad \mathscr{L}[\,e^{-at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}[\,e^{at}\cos\omega t]=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} \quad ; \quad \mathscr{L}[\,e^{-at}\cos\omega t]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Prima di formulare il prossimo teorema premettiamo la definizione di **funzione gradino unitario** u(t-a) definita dalla seguente relazione :

$$u(t-a)=\begin{cases} 0 & t\le a \\ 1 & t>a \end{cases}$$

dove, per il nostro scopo, supporremo a > 0. Questa funzione ci permette di scrivere la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \le a \\ f(t-a) & t > a \end{cases}$$

nel modo seguente:

g(t) = u(t-a) f(t-a).

In altre parole la funzione g(t) definita precedentemente descrive la funzione ottenuta traslando f(t) di a unità sulla destra e che vale zero in [0 , a].
Il prossimo teorema noto come **"secondo teorema del ritardo"** fornisce una formula per la trasformata di Laplace di tali funzioni.
Teorema 4.3.
Sia f(t) una funzione continua a tratti di ordine esponenziale su [0 , +∞). Allora:

$$\mathscr{L}\left[u(t-a)\, f(t-a)\right] = e^{-a\,s}\, \mathscr{L}\left[f(t)\right]$$

Dimostrazione.

$$\mathscr{L}\left[u(t-a)f(t-a)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st}u(t-a)\, f(t-a)dt = \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-s(t+a)} f(t)dt = e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = e^{-as}\, \mathscr{L}\left[f\right] = e^{-as}F(s)$$

In particolare è

$$\mathscr{L}\left[u(t-a)\right] = e^{-a\,s}\frac{1}{s} .$$

Il fattore $e^{-a\,s}$ nelle precedenti formule, per ragioni fisiche, è detto **fattore di ritardo**.

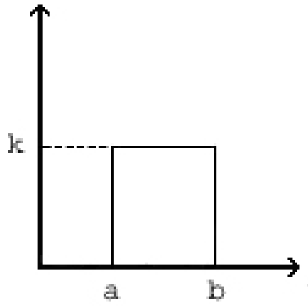
Esempi :

Determinare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni.

1. Funzione di Heaviside traslata di a:

$$\mathscr{L}\left[u(t-a)\right] = \frac{1}{s}e^{-a\,s}$$

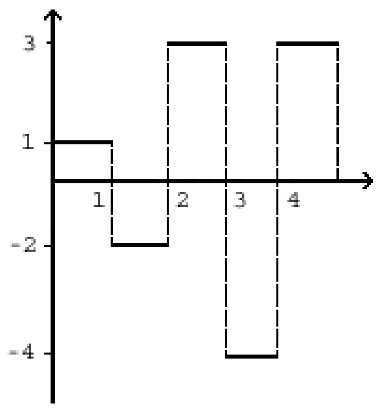
2. Impulso rettangolare g(t) in figura:



Essendo $g(t) = k\left[u(t - a) - u(t - b)\right]$ segue che

$$\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{k}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$$

3. Funzione f(t) in figura:



Essendo

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[u(t)-u(t-1)\right]-2\left[u(t-1)-u(t-2)\right]+3\left[u(t-2)-u(t-3)\right]-4\left[u(t-3)-u(t-4)\right]+\ldots = \\ &= u(t)-3u(t-1)+5u(t-2)-7u(t-3)+\ldots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(2n+1)\,u\,(t-n) \end{aligned}$$

risulta

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,\frac{e^{-ns}}{s}$$

4. $f(t) = e^t\, u(t-a)$

Da $f(t) = e^a \left[e^{t-a}\, u(t-a)\right]$ segue che

$$\mathscr{L}\left[e^t\, u(t-a)\right] = e^a\, \frac{e^{-as}}{s-1} = \frac{e^{-a(s-1)}}{s-1}$$

5. $f(t) = t\, u(t-a)$

Da $f(t) = (t-a)u(t-a) + a\, u(t-a)$ segue che

$$\mathscr{L}\left[t\, u(t-a)\right] = \frac{1}{s^2}\, e^{-as} + \frac{a}{s}\, e^{-sa}$$

Esempi :

Nota $F(s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right]$ determinare $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right]$

1. $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s^2};$ $\qquad f(t) = u(t-3)(t-3)$

2. $F(s) = \dfrac{e^{-ds}}{s^2+w^2};$ $\qquad f(t) = u(t-d)\,\dfrac{1}{w}\sin w(t-d)$

3. $F(s) = \dfrac{s\, e^{-ds}}{s^2+5s+6} = e^{-ds}\, \dfrac{s}{(s+3)(s+2)} = e^{-ds}\left(\dfrac{3}{s+3} - \dfrac{2}{s+2}\right);$

$f(t) = u(t-d)(3\, e^{-3(t-d)} - 2\, e^{-2(t-d)}$

4. $F(s) = \dfrac{e^{-ds}}{s^2-4s+8} = \dfrac{e^{-ds}}{(s-2)^2+4};$ $\qquad f(t) = u(t-d)$

$f(t) = u(t-d)\,\dfrac{1}{2}\, e^{2(t-d)}\sin 2(t-d)$

Teorema 4.4

Sia f continua su $(0,\infty)$ e supponiamo che f ' sia una funzione continua a tratti e di ordine esponenziale su $[0,\infty)$. Allora

$$\mathscr{L}[f'] = s\, \mathscr{L}[f] - f(0^+) \tag{3-7}$$

Dove f(0^+) = *lim* per t che tende a 0^+ di f(t).
Più generalmente, se f , f' ,…… $f^{(n-1)}$ sono continue per t>0, e se $f^{(n)}$ è continua a tratti di ordine esponenziale su $[0,\infty)$, allora

$$\mathscr{L}\,[\,f''\,]=s^2\,\mathscr{L}\,[\,f\,]\,-sf\,(0^+)\,-\,f'\,(0^+) \qquad (3\text{-}8)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathscr{L}\,[\,f^{(n)}]=s^n\,\mathscr{L}\,[\,f\,]\,-s^{n-1}\,f\,(0^+)\,-\,\ldots\ldots\ldots-\,f^{(n-1)}(\,0^+) \qquad (3\text{-}9)$$

Dimostrazione.

Per stabilire la (3-7) integriamo per parti

$$\mathscr{L}\,\left[f'(t)\right]=\int_0^{+\infty}e^{-st}\,f'(t)dt=e^{-st}\;f(t)\,\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}e^{-st}\,f(t)dt.$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo dimostrare che

$$e^{-st}\;f(t)\,\Big|_0^{+\infty}=-f(0^+)\,.$$

A tale scopo osserviamo che essendo *f* di ordine esponenziale

$$e^{-st}\,f(t)\to 0\;\text{ quando }\;t\to+\infty$$

ogni volta che s è sufficientemente grande. Pertanto

$$e^{-st}\;f(t)\,\Big|_0^{+\infty}=\lim_{t\to0}[-e^{-st}\,f(t)]=-f(0^+)$$

dove si è tenuto conto del fatto che f in t=0 deve avere un salto qualora non fosse ivi continua.

Teorema 4.5.

Sia *f* una funzione continua a tratti, di ordine esponenziale su [0 , +∞). Allora

i) $$\mathscr{L}\,\left[\int_0^t f(u)\,du\right]=\frac{1}{s}\,\mathscr{L}\,\left[f\right]=\frac{1}{s}F(s)\,.$$

ii) $$\mathscr{L}\,\left[\int_0^t\int_0^u f(v)\,dv\,du\right]=\frac{1}{s^2}\,\mathscr{L}\,\left[f\right]=\frac{1}{s^2}F(s)\,.$$

Esempio :

Essendo

$$\mathscr{L}\left[e^{2t}\sin(3t)\right] = \frac{3}{(s-2)^2+9}$$

segue che

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{2u}\sin(3u)\,du\right] = \frac{1}{s}\;\frac{3}{(s-2)^2+9}$$

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t\int_0^u e^{2v}\sin(3v)\,dv\right] = \frac{1}{s^2}\;\frac{3}{(s-2)^2+9}\;.$$

Dimostrazione.

Poniamo

$$h(t) = \int_0^t f(u)du$$

ovviamente è $h(0)=0$. Integrando per parti otteniamo

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st}h(t)dt = -\frac{1}{s}e^{-st}h(t)\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}h(t)\right] + \frac{1}{s}\,\mathscr{L}\left[f(t)\right]$$

Poiché h(t) è di ordine esponenziale, il limite precedente tende a zero ammesso che s sia sufficientemente grande, quindi la **i)**.
Analogamente si dimostra che

$$\mathscr{L}\left[\int_a^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}\,\mathscr{L}\left[f(t)\right] - \frac{1}{s}\int_0^a f(t)dt.$$

Per il calcolo delle trasformate inverse la i) ci fornisce

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F(s)\right] = \int_0^t f(u)du \qquad \text{dove} \qquad f(u) = \mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

Per calcolare

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}F(s)\right]$$

è opportuno procedere come segue:

Prima si calcola

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad ;$$

Successivamente si calcola:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F(s)\right] = \int_0^t f(u)du = g(t) \quad ;$$

infine si calcola

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}F(s)\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}F(s)\right)\right] = \int_0^t g(u)du \, .$$

Ovviamente, per calcolare

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}F(s)\right]$$

basta iterare il procedimento precedente.

Esempio:

Calcolare

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+2}\right]$$

essendo

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t}$$

segue che

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{s+2}\right] = \int_0^t e^{-2u}du = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)$$

quindi

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\frac{1}{s+2}\right)\right] = \frac{1}{2}\int_0^t \left(1-e^{-2u}\right)\mathrm{du} = \frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\left(e^{-2t}-1\right)\right].$$

Teorema : 4.6

Sia f una funzione continua a tratti di ordine esponenziale su $[0\ ,+\infty)$. Allora

i) $\mathscr{L}\left[\mathrm{t\ f(t)}\right] = -\frac{d}{ds}F(\mathrm{s})$; **ii)** $\mathscr{L}\left[\mathrm{t^n\ f(t)}\right] = (-1)^{\mathrm{n}}\frac{d^{\mathrm{n}}}{ds^{\mathrm{n}}}F(\mathrm{s})$.

Dimostrazione.

Essendo f di ordine esponenziale su $[0\ ,+\infty)$, per qualche $C > 0$ esiste

$$\mathrm{h} = \inf\left\{\beta\in\Re : |\mathrm{f(t)}| \le \mathrm{C}e^{\beta\,\mathrm{t}} \quad \forall \mathrm{t}\ge 0\right\}.$$

Sia $k \in (h\ ,\alpha)$, allora essendo α-k $\le$ s-k per ogni $s > k$.

si evince che

$$\mathrm{e}^{-\,\mathrm{s\,t}}|\mathrm{F(t)}| \le \mathrm{M}\,e^{-(\mathrm{s-k})\,\mathrm{t}} \le \mathrm{M}\,e^{-(\alpha-\mathrm{k})\,\mathrm{t}} \qquad \forall \mathrm{t}\ge 0$$

da cui

$$\left|\int_{\mathrm{b}}^{+\infty}\mathrm{t\,e^{-s\,t}\ f(t)\,dt}\right| \le \mathrm{M}\int_0^{+\infty}\mathrm{t\,e}^{-(\alpha-\mathrm{k})\,\mathrm{t}}\ \mathrm{dt}.$$

Essendo

$$\int_{\mathrm{b}}^{+\infty}\mathrm{t\,e}^{-(\alpha-\mathrm{k})\,\mathrm{t}}\ \mathrm{dt} = \mathrm{e}^{-(\alpha-\mathrm{k})\,\mathrm{b}}\left(\frac{1}{(\alpha-\mathrm{k})^2}+\frac{\mathrm{b}}{(\alpha-\mathrm{k})}\right)$$

segue che

$$-\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st}\,f(t)\right]dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,t\,f(t)\,dt \underset{u}{=} \mathcal{L}\left[t\,f(t)\right]$$

da cui, per il teorema di derivazione sotto il segno, si evince che

$$\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st}\,f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st} f(t)\right]dt$$

e, quindi, la **i)**. Per induzione su n si evince la **ii)**.

Per il calcolo delle trasformate inverse ci fornisce $\mathcal{L}^{-1}\left[-F'(s)\right] = t\,f(t)$

dove $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$

Esempi :

Calcoliamo la trasformata inversa di Laplace $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[f(s)\right]$ delle seguenti:

i) $F(s)\,\dfrac{s}{\left(s^2+w^2\right)^2}$; ii) $F(s) = \arctan\left(\dfrac{2}{s^2}\right)$

i) Osservato che

$$F(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+w^2}\right) = \mathcal{L}\left[t\,g(t)\right]$$

dove

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+w^2}\right] = \frac{1}{2w}\sin wt$$

si evince

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{t}{2w}\sin wt_0$$

ii) Risulta

$$-F'(s) = \frac{4s}{s^4+4} = \frac{4s}{\left(s^2+2\right)^2-4s^2} = \frac{4s}{\left(s^2+2-2s\right)\left(s^2+2+2s\right)} = \frac{1}{s^2-2s+2} - \frac{1}{s^2+2s+2} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)+1}$$

Da cui, tenuto presente che $-F'(s) = \mathscr{L}\left[t\, f(t)\right]$, si evince quanto segue

$$t\, f(t) = e^{t}\sin t - e^{-t}\sin t = \left(e^{t} - e^{-t}\right)\sin t$$

quindi

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \frac{2}{t}\sin t\,\sinh t$$

Teorema 4.7.

Sia f di ordine esponenziale e periodica con periodo T, allora

$$\mathscr{L}\left[f\right] = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-sT}} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\mathscr{L}\left[f(t)\left(u(t)-u(t-T)\right)\right]$$

in quanto

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sT} f(t)\,dt$$

dove

$$\int_0^T e^{-sT} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-sT} f(t)\left[u(t)-u(t-T)\right]dt$$

ovvero

$$\int_0^T e^{-sT} f(t)\,dt = \mathscr{L}\underbrace{\left[f(t)\left[u(t)-u(t-T)\right]\right]}_{\text{RESTRIZIONE DI f(t) su [0,T]}}$$

Dimostrazione.

$$\mathscr{L}\left[f\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{T} e^{-st} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)dt + \ldots\ldots.$$

Tenuto presente che

$$\int_a^b g(t)dt = \int_0^{b-a} g(t+a)dt$$

segue che

$$\int_T^{2T} e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-s(t+T)} f(t+T)dt = e^{-sT}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$\int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-s(t+2T)} f(t+2T)dt = e^{-2sT}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

....

quindi

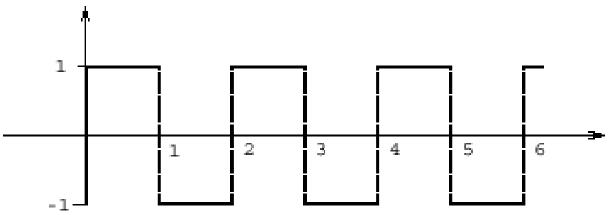
$$\mathscr{L}\,[f] = \left(1+e^{-sT}+e^{-2sT}+....\right)\int_0^T e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{+\infty} e^{-sT}\,[f(t)\,\left(u(t)-u(t-T)\right)]dt$$

ovvero l'asserto.

Funzioni periodiche : $f(t+T) = f(t) \qquad t \geq 0$

Esempi :

1. Onda quadra



(T = 2)

Sia f(t) la funzione in figura, sia

$$f_0(t) = f(t)\,\left[u(t)-u(t-T)\right] = u(t)-u(t-1)-u(t-1)+u(t-2)$$

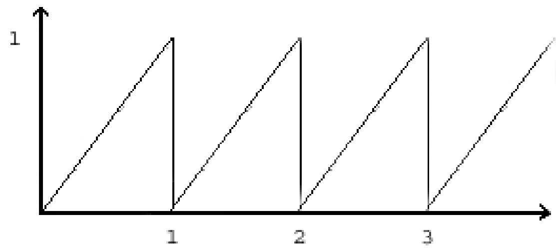
allora

$$\mathscr{L}\,[f_0(t)] = \frac{1}{s} - 2\,\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)^2$$

quindi

$$\mathscr{L}\,[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2s}}\,\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)^2 = \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}} = \frac{1}{s}\,th\,\frac{s}{2}$$

2. Onda a dente di sega



(T = 1)

Sia f(t) la funzione in figura, sia

$$f_0(t) = t\ \left[u(t) - u(t-1)\right] = t\ u(t) - (t-1)\ u(t-1) - u(t-1)$$

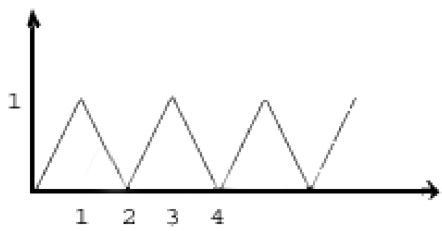
da cui

$$\mathscr{L}\left[f_0(t)\right] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\, e^{-s} - \frac{1}{s}\, e^{-s} = \frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}\right) - \frac{e^{-s}}{s}$$

quindi

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{1-e^{-s}}\left[\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}\right) - \frac{e^{-s}}{s}\right] = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s\,(1-e^{-s})}$$

3. Onda triangolare



(T = 2)

Sia f(t) la funzione in figura, sia

$$\begin{aligned} f_0(t) &= t\ \left[u(t) - u(t-1)\right] - (t-2)\ \left[u(t-1) - u(t-2)\right] = \\ &= t\ u(t) - (t-1)\,u(t-1) - \cancel{u(t-1)} - (t-1)\,u(t-1) + \cancel{u(t-1)} + (t-2)\,u(t-2) \end{aligned}$$

allora

$$\mathscr{L}\left[f_0(t)\right] = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}\, e^{-s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2} = \frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s^2}$$

quindi

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{1-e^{-2s}}\ \frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s^2} = \frac{1}{s^2}\ \frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}} = \frac{1}{s^2}\, th\frac{s}{2}$$

5. Convoluzione.

Siano f e g due funzioni continue a tratti su $[0,+\infty)$ e nulle su $(-\infty, o)$.
La convoluzione di f e g si indica con f∗g ed è definita dalla seguente relazione:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du\,.$$

E' facile verificare che la convoluzione è commutativa e distributiva:

i) $f * g = g * f$; **ii)** $f*(g+H) = f*g + f*H$

dove anche H è una funzione continua a tratti su $[0,+\infty)$.
Inoltre è associativa:

iii) $(f*g)*H = f*(g*H)\,.$

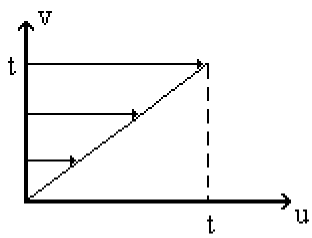
infatti è

$$(f*g)*H(t) = \int_0^t (f*g)(t-u)H(u)\,du = \int_0^t H(u)\int_0^{t-u} f(t-u-v)g(v)\,dvdu$$

e

$$f*(g*H)(t) = \int_0^t f(t-v)(g*H)(v)\,dv =$$

$$= \int_0^t f(t-v)\int_0^v g(v-u)H(u)\,dudv$$



da cui, scambiando l'ordine di integrazione si ottiene

$$f*(g*H)(t) = \int_0^t H(u)\int_u^t g(v-u)f(t-v)\,dv\,du =$$

$$= \int_0^t H(u)\int_0^{t-u} f(t-v-u)\,g(v)\,dv\,du = (f*g)*H(t)\,.$$

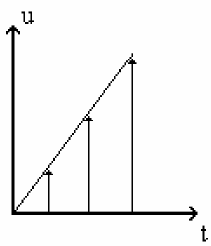
Le proprietà **i)**, **ii)** ed **iii)** giustificano la terminologia secondo la quale $f*g$ è detto prodotto di convoluzione. Vale il seguente

Teorema di convoluzione :
Siano *f* e *g* due funzioni continue a tratti di ordine esponenziale su $[0,+\infty)$. Allora

$$\mathcal{L}[f*g]\ \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$$

ovvero

$$\mathcal{L}\int_0^t [f(t-u)\,g(u)\,du] = f(s)\,g(s).$$



Dimostrazione.
Per definizione è

$$\mathscr{L}\left[f * g\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du dt = \iint_A e^{-st}\, f(t-u)\, g(u)\, du dt$$

dove $A = \left\{ (t\,,\, u)\colon\ 0 \le\ t\ < \infty,\quad 0 \le u \le t \right\}$.

Poiché l'insieme precedente può essere descritto come segue

$A = \left\{ (t\,,\, u)\colon\ u \le\ t\ < \infty,\quad 0 \le u < t \right\}$.

Scambiando l'ordine di integrazione si ottiene

$$\mathscr{L}\left[f * g\right] = \int_0^{+\infty} g(u)\, du \int_0^{\infty} e^{-st}\, f(t-u)\, dt = \int_0^{+\infty} g(u)\, du \int_0^{+\infty} e^{-s(t+u)}\, f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-su}\, g(u)\, du \int_0^{+\infty} e^{-st}\, f(t)\, dt = g(s)\, f(s) =$$

$$\mathscr{L}\left[f * g\right] = \int_0^{+\infty} g(u)\, du \int_0^{\infty} e^{-st}\, f(t-u)\, dt = \int_0^{+\infty} g(u)\, du \int_0^{+\infty} e^{-s(t+u)}\, f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-su}\, g(u)\, du \int_0^{+\infty} e^{-st}\, f(t)\, dt = g(s)\, f(s) = \mathscr{L}\,[f]\,\mathscr{L}\,[g]$$

Da cui

$$\mathscr{L}^{-1}\left[f(s)g(s)\right] = f(t) * g(t)$$

Si osservi che

$$1*1 = \int_0^t 1 \cdot 1\, du = t; \qquad 1*1*1 = (1*1)*1 = \int_0^t u\, du = \frac{t^2}{2};$$

$$1*1*1*1 = (1*1*1)*1 = \int_0^t \frac{u^2}{2}\, du = \frac{t^3}{3!};$$

Iterando il procedimento (per induzione)

$$1*1* \dots *1 = \frac{t^n}{n!}$$

n+1 volte.

Esempi

1. Calcolare l'antitrasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$$\text{i) } f(s) = \frac{1}{(s^2+4)^2} \qquad \text{ii) } f(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} \qquad \text{iii) } f(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$$

I) Essendo

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\sin 2t$$

dal teorema di convoluzione si evince che

$$F(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4)^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4)}\cdot\frac{1}{(s^2+4)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4)}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4)}\right]$$

cioè

$$F(t) = \frac{1}{4}\int_0^t \sin 2(t-u)\sin 2u \, du$$

da cui

$$F(t) = \frac{1}{8}\int_0^t [\cos 2(t-2u) - \cos 2t]du = \frac{\sin 2t - 2t\cos 2t}{16}$$

ii) Essendo

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos t \quad \text{e} \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$$

dal teorema della convoluzione si evince che

$$F(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\cdot\frac{1}{(s^2+1)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right]$$

cioè

$$F(t) = \int_0^t \cos(t-u)\sin u \, du$$

da cui

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin t + \sin(2u-t)]du = \frac{1}{2}t\sin t$$

iii) Da

$$\frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

e dalla linearità di L^{-1} segue che

$$F(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = \text{sint - } \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]$$

da cui, essendo per il teorema di convoluzione

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{b} = \int_0^{b}\int_0^{+\infty}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\cdot\frac{1}{(s^2+1)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right]$$

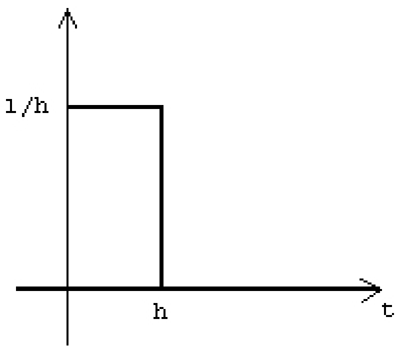
si evince che

$$F(t) = \sin t - \int_0^t \sin(t - u)\sin u \, du = \frac{\sin t + t\cos t}{2}$$

Funzione delta di Dirac
Consideriamo la funzione (impulso unitario di durata h)

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \quad e \quad t > 0 \\ \\ \dfrac{1}{h} & 0 < t < h \end{cases}$$

il cui grafico è



Essa rappresenta una quantità che agisce nell'intervallo (0,h) dove il suo valore è costante 1/h; il suo effetto totale è uguale a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t)\,dt = \int_0^h \frac{1}{h}\,dt = 1$$

Ora supponiamo che $h \to 0$; è chiaro che la famiglia di funzioni $\delta_h(t)$ diverge, ma noi introduciamo una funzione convenzionale $\delta(t)$ come il limite di questa famiglia:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \delta_h(t)$$

La funzione $\delta(t)$ è detta **funzione impulso di ordine zero** o **funzione impulsiva di Dirac** o più semplicemente **delta di Dirac**. Risulta

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

e malgrado tutto si suppone verificare che la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t)\,dt = 1$$

La funzione $\delta(t)$ rappresenta un processo limite ben definito che si incontra spesso in fisica: una quantità infinitamente grande che agisce in un intervallo infinitamente piccolo, il cui effetto totale è uguale all'unità. Conviene considerare la trasformata di Laplace della funzione $\delta(t)$ come il limite per $h \to 0$ della trasformata della funzione

$$\delta_h(t) = \frac{1}{h}\left[u(t) - u(t-h)\right]$$

ovvero

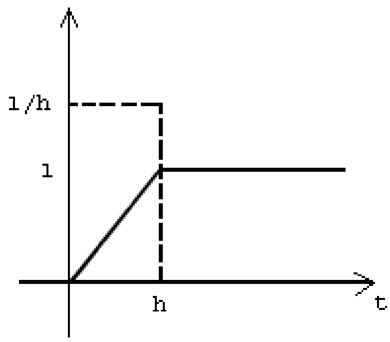
$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = \lim_{h \to 0} \mathscr{L}\left[\delta_h(t)\right]$$

segue che

$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = 1$$

La relazione precedente può essere dedotta anche nel modo seguente. Poniamo

$$u_h(t) = \int_0^t \delta_h(t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\,t & t \in [0,h] \\ 1 & t > h \end{cases}$$



$u_h(t)$

Si vede che, quando $h \to 0$, $u_h(t) \to u(t)$, pertanto

$$\int_0^t \delta(t)\,dt = u(t)$$

Allora $\delta(t) = u'(t)$ e

$$\mathscr{L}\,[\delta(t)] = \mathscr{L}\,[\,u'(t)] = s\,\mathscr{L}\,[u(t)] - u(0) = s \cdot \frac{1}{s} = 1$$

Qui è

$$u(0) = \lim_{h \to 0} u_h(0) = 0$$

Sia $f(t)$ una funzione continua su $[0,+\infty)$, allora per il teorema della media abbiamo

$$\int_0^{+\infty} f(t)\;\delta(t)\,dt = f(0)$$

(se la funzione $f(t)$ è discontinua per $t = 0$, allora $f(0) = f(0+)$).
Da quanto precede si evince (ancora una volta) che

$$\mathscr{L}\,[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}\;\delta(t)\,dt = 1$$

Per la proprietà del ritardo è

$$\mathscr{L}\,[\delta(t-a)] = e^{-as}$$

Analogamente a quanto precede risulta

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a)$$

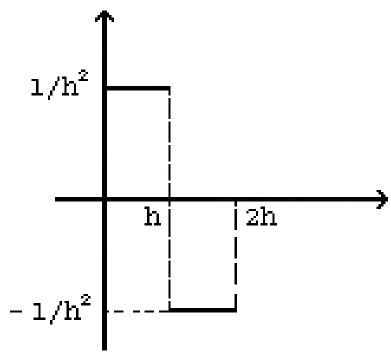
dove $\delta(t-a)$ è la traslata di $\delta(t)$, a > 0 e f è continua su $[0,\infty)$. Ovviamente

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & t \neq a \\ \\ +\infty & t = a \end{cases}$$

In modo analogo si definiscono le **funzioni impulso di ordine superiore**. Consideriamo la funzione

$$\delta_h^{(1)}(t) = \frac{1}{h^2}\left[u(t) - 2u(t-h) + u(t-2h)\right]$$

il cui grafico è



$$\delta_h^{(1)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2} & 0 < t < h \\ -\dfrac{1}{h^2} & h < t < 2h \\ 0 & altrove \end{cases}$$

allora il suo “limite” per $h \to 0$ è per definizione la **funzione impulso di ordine uno**:

$$\lim_{h\to 0} \delta_h^{(1)}(t) = \delta_1(t)$$

Così come la funzione $\delta(t)$, la trasformata di Laplace della funzione $\delta_1(t)$ è, per definizione, il limite per $h \to 0$ della trasformata di Laplace della funzione $\delta_h^{(1)}(t)$:

$$\mathscr{L}\left[\delta_1(t)\right] = \lim_{h\to 0} \mathscr{L}\left[\delta_h^{(1)}(t)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{s\,h^2}\left(1 - e^{-hs}\right)^2$$

da cui

$$\mathscr{L}\left[\delta_1(t)\right] = s$$

Sia f una funzione che abbia derivata di ordine n+1 generalmente continua e di ordine esponenziale che soddisfa alle condizioni iniziali $f^{(k)}(0) = (0)$ k = 0,1…n+1. Allora

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n \mathscr{L}\left[f(t)\right]$$

Poiché la trasformata di Laplace della funzione $\delta(t)$ è 1 : $\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = 1$, per quanto precede, “è lecito” supporre

$$s^n = s^n \mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = \mathscr{L}\left[\delta^{(n)}(t)\right] = \mathscr{L}\left[\delta_n(t)\right]$$

in altre parole è lecito definire s^n come la trasformata di Laplace della funzione impulso di ordine n, ovvero della derivata di ordine n+1 della funzione $u(t)$ di Heaviside.

Applicazioni:

1. Dimostriamo che:

$$\int_0^t J_0(u)J_0(t-u)du = sent \qquad (1)$$

A tale scopo, se poniamo:

$$h(t) = \int_0^t J_0(u)J_0(t-u)du = sent$$

dalla definizione di convoluzione si evince che

$$h(t) = J_0(t) * J_0(t)$$

Allora per il teorema della convoluzione, è

$$\mathscr{L}[h(t)] = \mathscr{L}[J_o(t)] \cdot \mathscr{L}[J_o(t)]$$

Da cui essendo

$$\mathscr{L}\left[J_0(t)\right] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Segue che

$$\mathscr{L}\left[h(t)\right] = \frac{1}{s^2+1}$$

Antitrasformando l’equazione precedente si ottiene la (1).

2. **Funzione Beta**

La funzione beta è definita come segue:

$$\beta(m,n)=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du \qquad m > 0,\ n > 0$$

Se poniamo

$$h(t)=\int_0^1 u^{m-1}(t-u)^{n-1}\,du$$

Dalla definizione di convoluzione si evince che

$$h(t)=\left(t^{m-1}\right)*\left(t^{n-1}\right)$$

Prendendo la trasformata di Laplace di entrambi i membri per il teorema di convoluzione si ha:

$$\mathscr{L}\left[h(t)\right]=\mathscr{L}\left[t^{m-1}\right]\cdot\mathscr{L}\left[t^{n-1}\right]$$

Ovvero

$$\mathscr{L}\left[h(t)\right]=\frac{\Gamma(m)}{s^m}\cdot\frac{\Gamma(n)}{s^n}$$

Da cui, antitrasformando, si ottiene:

$$\left[h(t)\right]=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\cdot t^{m+n-1}$$

In particolare è:

$$\left[h(1)\right]=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

quindi

$$\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^{m-1}du=\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

1. Equazioni integrali di Volterra

Si dice equazione integrale un'equazione che contiene la funzione incognita sotto il segno di integrale. Se la funzione incognita *y(t)* entra nell'equazione in modo lineare, l'equazione integrale è detta lineare.
Un equazione integrale del tipo

$$y(t) = f(t) + \int_a^t k(t,x) y(x) dx$$

è detta equazione integrale lineare di Volterra di seconda specie.
Se la funzione incognita *y(t)*figura solo sotto il segno di integrale, ovvero un'equazione del tipo:

$$\int_a^t k(t,x) y(x) dx = f(t)$$

è detta equazione integrale lineare di Volterra di prima specie .Nelle equazioni precedenti le funzioni *K(t,x) e f(t)* sono assegnate; la funzione *K(t,x)* si chiama nucleo dell'equazione .
Le equazioni del tipo

$$y(t) = f(t) + \int_a^t k(t-x) y(x) dx \qquad (1)$$

dove il nucleo *K(t-x)* dipende dalla differenza degli argomenti, appartengono ad un importante classe di equazioni di Volterra che vengono chiamate equazioni integrali di tipo convoluzionale e possono essere scritte nella forma:

$$y(t) = f(t) + k(t) * y(t)$$

Prendendo le trasformate di Laplace di entrambi i membri, ammesso che *f(t) e K(t)*siano trasformabili si ha:

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[f(t)] + \mathscr{L}[k(t)]\ \mathscr{L}[y(t)]$$

Ovvero

$$Y(s) = F(s) + K(s) Y(s)$$

da cui

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 - K(s)}$$

Quindi antitrasformando l'equazione precedente si ottiene la soluzione dell'equazione integrale (1).

Esempi:

Per risolvere l'equazione integrale

$$y(t) = t + \int_0^t y(t) J_1(t-u)\,du$$

scriviamo l'equazione integrale nella forma

$$y(t) = t + y(t) * J_1(t)$$

Allora prendendo la trasformata di Laplace e usando il teorema di Convoluzione, abbiamo

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s)\left(1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)$$

dove si è tenuto conto che

$$\mathscr{L}\,[J_1(t)] = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}} = 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

Risolvendo l'equazione precedente otteniamo:

$$Y(s) = \frac{1}{s^3}\sqrt{s^2+1} = \frac{s^2+1}{s^3\sqrt{s^2+1}}$$

ovvero

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} + \frac{1}{s^3}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Antitrasformando l'equazione precedente risulta

$$y(t) = \int_0^t J_0(u)\,du + \int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!} J_0(u)\,du = \int_0^t J_0(u)\,du + \frac{t^2}{2}\int_0^t J_0(u)\,du - t\int_0^t u \cdot J_0(u)\,du + \int_0^t \frac{u^2}{2} J_0(u)\,du$$

da cui, essendo $u \cdot J_0(u) = \frac{d}{du}[u \cdot J_1(u)]$, segue che

$$\int_0^t u \cdot J_0(u)\,du = \int_0^t \frac{d}{du}[u \cdot J_1(u)]\,du = t \cdot J_1(t)$$

$$\int_0^t u \cdot J_0(u)du = \int_0^t u \cdot \frac{d}{du}[u \cdot J_1(u)]du = t^2 \cdot J_1(t) - \int_0^t u \cdot J_1(u)du$$

$$= t^2 \cdot J_1(t) + \int_0^t u \cdot J_0{}'(u)du = t^2 J_1(t) + t \cdot J_0(t) - \int_0^t J_0(u)du$$

quindi

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 + 1\right)\int_0^t J_0(u)du - \frac{t^2}{2} J_1(t) + \frac{t}{2} J_0(t)$$

Per risolvere l'equazione integrale

$$\int_0^t u \cdot y(u)\cos(t-u)du = t \cdot e^{-t} - sent$$

scriviamo l'equazione integrale nella forma:

$$(t \cdot y(t)) * \cos t = t \cdot e^{-t} - sent$$

Allora prendendo la trasformata di Laplace e usando il teorema di Convoluzione, abbiamo

$$-Y'(s)\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

da cui

$$-Y'(s) = \frac{s^2+1}{s(s+1)^2} - \frac{1}{s} = \frac{s}{(s+1)^2} + \frac{1}{s}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s}$$

ovvero

$$-Y'(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s}$$

antitrasformando l'equazione precedente abbiamo

$$t \cdot y(t) = e^{-t} - t \cdot e^{-t} + \int_0^t u \cdot e^{-u} du - 1 = -2t \cdot e^{-t}$$

da cui

$$y(t) = -2e^{-t}$$

RISOLUZIONE DI E.D. TRAMITE LA TRASFORMATA DI LAPLACE

Vedremo ora come si determina la soluzione di un’equazione differenziale lineare a coefficienti costanti con l’ausilio della trasformata di Laplace.
E’ naturale domandarsi: già si conoscono metodi per risolvere tali equazioni, perché allora trovare un altro metodo?
La risposta è che quando si procede con i metodi standard si cerca prima la soluzione generale, successivamente si devono fare ulteriori calcoli per determinare i valori che le costanti arbitrarie devono assumere affinché la soluzione soddisfi le condizioni iniziali assegnate.
Il metodo della trasformata di Laplace semplifica notevolmente tali difficoltà in quanto dà direttamente la trasformata di Laplace della soluzione del problema di Cauchy. Utilizzando poi una tavola di corrispondenza tra F(t) e $\mathscr{L}$ [F(t)] si ottiene la soluzione richiesta.

Esempi

1. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y''-y'-6y = 3t^2 + t - 1 \qquad y(0)=-1 \quad y'(0) = 6$$

Applicando la trasformata di Laplace all’equazione precedente si ottiene un’equazione algebrica la cui incognita è $\mathscr{L}$ [y]:

$$(s^2 - s - 6)\,\mathscr{L}\,[y] \mp 7 - s + \frac{6}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

da cui

$$\mathscr{L}\,[y] = \frac{7 - s}{s^2 - s - 6} + \frac{1}{s^2 - s - 6}\left(\frac{6}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)$$

dove il secondo membro è la trasformata di Laplace del problema di Cauchy assegnato.
Pertanto tale soluzione è:

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{7 - s}{s^2 - s - 6} + \frac{1}{s^2 - s - 6}\left(\frac{6}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)\right]$$

Infine dalla linearità di $\mathscr{L}^{-1}$ e da

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{7 - s}{s^2 - s - 6}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{5}\frac{1}{s - 3} - \frac{9}{5}\frac{1}{s + 2}\right] = \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{9}{5}e^{-2t}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - s - 6}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s - 3} - \frac{1}{s + 2}\right)\right] = \frac{1}{5}\left(e^{3t} - e^{-2t}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2 - s - 6}\right] = \int_0^t \frac{1}{5}\left(e^{3u} - e^{-2u}\right)du = \frac{1}{5}\left(\frac{e^{3t}}{3} + \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{5}{6}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2-s-6}\right]=\frac{1}{5}\int_0^t\left(\frac{e^{3u}}{3}+\frac{e^{-2u}}{2}-\frac{5}{6}\right)du=\frac{1}{5}\left(\frac{e^{3t}}{9}+\frac{e^{-2t}}{4}-\frac{5}{6}t+\frac{5}{36}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\frac{1}{s^2-s-6}\right]=\frac{1}{5}\int_0^t\left(\frac{e^{3u}}{9}+\frac{e^{-2u}}{4}-\frac{5}{6}u+\frac{5}{36}\right)du=\frac{1}{5}\left(\frac{e^{3t}}{27}+\frac{e^{-2t}}{8}-\frac{5}{12}t^2+\frac{5}{36}t-\frac{35}{216}\right)$$

si evince che

$$y=\frac{1}{5}\left(4e^{3t}-9e^{-2t}\right)-\frac{1}{2}t^2$$

2.

$$y''+4y'+4y=t^2e^{-2t} \qquad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0$$

$$\mathscr{L}\,[F'(t)]=s\,\mathscr{L}\,[F(t)]-F(0)$$

$$s\,\mathscr{L}\,[y'(t)]-y'(0)+4s\,\mathscr{L}\,[y(t)]-4y(0)+4\,\mathscr{L}\,[y(t)]=\frac{2}{(s+2)^3}$$

$$s^2\,\mathscr{L}\,[y(t)]-\underbrace{sy(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{0}+4s\,\mathscr{L}\,[y(t)]-\underbrace{4y(0)}_{0}+4\,\mathscr{L}\,[y(t)]=\frac{2}{(s+2)^3}$$

$$(s^2+4s+4)\,\mathscr{L}\,[y(t)]=\frac{2}{(s+2)^3}$$

$$\mathscr{L}\,[y(t)]=\frac{2}{(s+2)^5}=\frac{2}{4!}\frac{4!}{(s+2)^5}$$

$$y(t)=\frac{1}{12}t^4e^{-2t}$$

3.

$$y''+4y=\sin 2t \qquad y(0)=10 \quad , \quad y'(0)=0$$

$$s\,\mathscr{L}\,[y'(t)]+4\,\mathscr{L}\,[y(t)]=\frac{2}{s^2+4}$$

$$s^2\,\mathscr{L}\,[y(t)]-10s+4[y(t)]=\frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathscr{L}\,[y(t)] = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}\cdot\frac{1}{s^2+4}$$

$$y(t) = 10\cos 2t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-u)\sin 2u\,du = 10\cos 2t + \frac{1}{4}\int_0^t [\cos 2(t-2u) - \cos 2t]du =$$

$$= 10\cos 2t + \frac{1}{8}(\sin 2t - 2t\cos 2t)$$