TEOREMA DI GREEN

Le formule

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_C f(x,y)\, dy \qquad [1]$$

$$-\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \oint_C f(x,y)\, dx \qquad [2]$$

note come formule di Green sono due relazioni semplici ma molto importanti fra gli integrali estesi ad un dominio piano e gli integrali estesi alla frontiera del medesimo.

Nelle suddette formule f è di classe $C^{(1)}(D)$; C è il contorno orientato del dominio *D* considerato come una superficie con orientazione data da $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}$. Pertanto *C* è orientato positivamente se quando si percorre *C* secondo il suo orientamento il dominio *D* si trova alla sua sinistra.

Per dimostrare la validità delle formule [1] e [2] supponiamo che in un primo momento che il dominio *D* sia *y*-semplice ovvero che sia delimitato dalle due rette verticali $x = a$, $y = b$ e dai grafici C_1 e C_2 delle funzioni rispettivamente di equazioni

$$y = \varphi_1(x) \text{ e } y = \varphi_2(x) \qquad \text{con } a \le x \le b \text{ e } \varphi_1(x) \le \varphi_2(x).$$

Dove φ_1 e φ_2 si suppongono continue con le loro derivate prime.

Premesso che nelle suddette ipotesi risulta

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_x(x,y)\, dy + f\left[x,\varphi_2(x)\right]\varphi_2'(x) - f\left[x,\varphi_1(x)\right]\varphi_1'(x)$$

Si ottiene

1) $$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_x(x,y)\, dy =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy - f\left[x,\varphi_2(x)\right]\varphi_2'(x) + f\left[x,\varphi_1(x)\right]\varphi_1'(x) \right) dx =$$

$$= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} f(b,y)\, dy - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} f(a,y)\, dy + \int_a^b f\left(x,\varphi_1(x)\right)\varphi_1'(x)\, dx - \int_a^b f\left(x,\varphi_2(x)\right)\varphi_2'(x)\, dx =$$

$$= \int_{C_3} f(x,y)\, dy + \int_{C_4} f(x,y)\, dy + \int_{C_1} f(x,y)\, dx + \int_{C_2} f(x,y)\, dx = \oint_C f(x,y)\, dy$$

Negli integrali curvilinei precedenti C_3 e C_4 denotano i segmenti delle rette $x = b$ e $x = a$ che appartengono alla frontiera *C* del dominio *D*

2) $$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_y(x,y)\, dy = \int_a^b \left(f\left[x,\varphi_2(x)\right] - f\left[x,\varphi_1(x)\right]\right) dx = \oint_C f(x,y)\, dx$$

Nel caso in cui il dominio *D* è *x*-semplice si hanno forme analoghe, e la dimostrazione (con le opportune modifiche) è la stessa.

Passiamo ora la caso generale:

Sia D un dominio con frontiere C regolare a tratti e che possiede la proprietà seguente: la sua chiusura può essere suddivisa, da rette parallele agli assi coordinati x e y in numero finito di sottodomini D_k ciascuno dei quali è un dominio y-semplice, x-semplice o entrambi (i domini rettangolari).

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \sum_k \iint_{D_k} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \sum_k \oint_{C_k} f(x,y)\, dy$$

La frontiera generale per tutti i domini D_k è composta da C e da un numero finito di segmenti, ciascuno dei quali appartiene a D ed è comune a due domini vicini. Pertanto ogni segmento è percorso due volte in direzioni opposte, perciò gli integrali curvilinei corrispondenti a questi percorsi si compensano mutuamente e resta solo l'integrale esteso C. Pertanto

$$\sum_k \oint_{C_k} f(x,y)\, dy = \oint_C f(x,y)\, dy$$

e la dimostrazione è completa.

Dalle formule di Green segue il Teorema di Green.

Teorema di Green

Siano $C, C_1, \ldots, C_n$ n curve semplici, chiuse, lisce a pezzi con le seguenti proprietà:

1) Le curve non hanno punti comuni;
2) Le curve $C_1, \ldots, C_n$ stanno all'interno di C;
3) La curva C_i sta nell'esterno della curva C_j, $\forall\, i \neq j$ dove $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Sia R la regione costituita dall'unione di C con quella parte dell'interno di C che non è interna a C_1, C_2, …, C_n. Sia $\mathbf{F} = F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x,y)\,\mathbf{j}$ un campo vettoriale liscio in un aperto Ω contenente R, allora

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_C F_1(x,y)\, dx + F_2(x,y)\, dy - \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} F_1(x,y)\, dx + F_2(x,y)\, dy$$

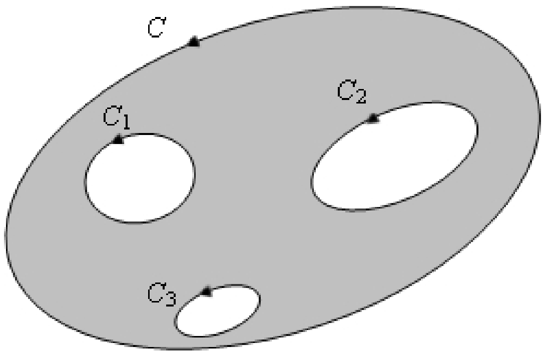


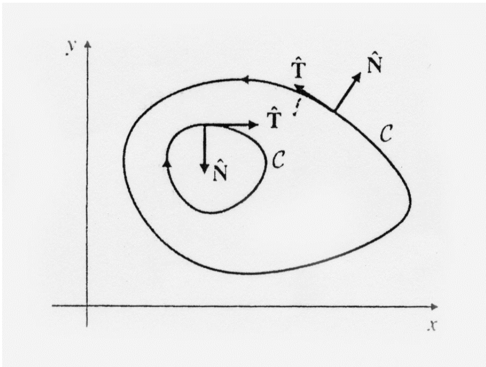
Fig. 1

In particolare se R è una regione limitata semplicemente connessa e C è la sua frontiera allora

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_C F_1(x,y)\, dx + F_2(x,y)\, dy$$

In questa formula si deve considerare *R* come una superficie orientata con normale ***k.***

Se *R* è una regione connessa chiusa e limitata del piano *xy* il suo contorno *C* è costituito da più curve chiuse semplici, lisce a pezzi, e che sono orientate positivamente. In particolare se R è un dominio semplicemente connesso, allora *C* sarà orientata nel verso orario; se R ha dei buchi in tal caso il contorno dei buchi sarà orientato nel verso orario. (vedi figura)



Comunque se indichiamo con $\hat{T}$ la tangente unitaria a *C* e con $\hat{N}$ la normale unitaria a *C* che punta all'esterno di *R*, a causa dell'orientamento di *C* questi settori devono soddisfare l'equazione vettoriale $\hat{N} = \hat{T} \times \hat{k}$.
Pertanto se *C* è parametrizzata per mezzo della lunghezza d'arco, allora

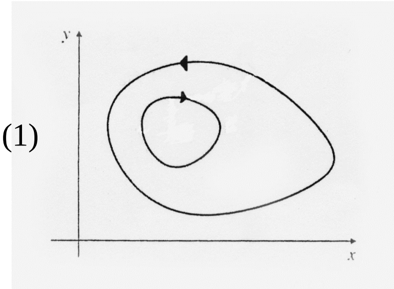
$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{T} = \frac{dx}{ds}\hat{i} + \frac{dy}{ds}\hat{j} \qquad \hat{N} = \hat{T} \times \hat{k} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{dy}{ds}\hat{i} - \frac{dx}{ds}\hat{j}$$

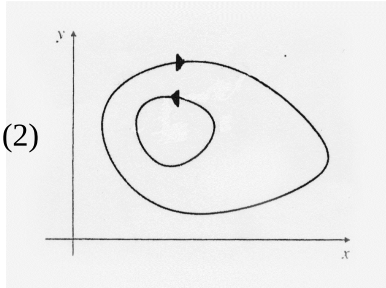
e risulta

$$\vec{F} \cdot \hat{T} = F_1 \frac{dx}{ds} + F_2 \frac{dy}{ds} = F_2 \frac{dy}{ds} + (-F_1)\left(-\frac{dx}{ds}\right) = \left(F_2 \hat{i} - F_1 \hat{j}\right) \cdot \hat{N}$$

La forma vettoriale della formula precedente, ovvero

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} \iint_R \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{k}\, dA & \text{Se } C \text{ è orientata positivamente (1)} \\ \iint_R \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \left(-\hat{k}\right) dA & \text{Se } C \text{ è orientata negativamente (2)} \end{cases}$$

(1) 

(2) 

corrisponde al teorema di Stokes nel piano (vedi paragrafo successivo).

Esempio N°1

Con l'ausilio delle formule di Green, calcolare

$$I = \iint_D \left(y e^{x^2+y^2-1} + y^3 e^{x^2+y^2-1} \right) dx\, dy$$

dove D è quella parte del disco $x^2 + y^2 \le 1$ che sta nel 1° quadrante.

Svolgimento

Osservato che

$$y e^{x^2+y^2-1} + y^3 e^{x^2+y^2-1} = \frac{1}{2}\left(2y e^{x^2+y^2-1} + y^2\, 2y e^{x^2+y^2-1} \right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{dy} y^2 e^{x^2+y^2-1}$$

Utilizziamo la formula

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\oint_C f(x,y)\, dx\,.$$

Allora

$$I = \frac{1}{2}\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\frac{1}{2}\oint_C f(x,y)\, dx \qquad\qquad f(x,y) = y^2 e^{x^2+y^2-1}$$

dove C è costituita dagli archi

$C_1 : x = t,\ y = 0 \qquad\qquad 0 \le t \le 1$

$C_2 : x = \cos t,\ y = \sin t \qquad\qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$C_3 : x = 0,\ y = t \qquad\qquad 0 \le t \le 1$

Poiché su C_1 è $f(t,0) = 0$ e che su C_3 è $dx = 0$, si ha:

$$\oint_C f(x,y)\, dx = \oint_{C_2} f(x,y)\, dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \sin t\, dt = -\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2 t\right)\sin t\, dt = -\frac{2}{3}$$

quindi $I = 1/3$. Per verificare l'esattezza del risultato ottenuto calcoliamo l'integrale doppio. Risulta

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 e^{x^2+y^2-1} \right) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Un'applicazione del teorema di Green

L'integrale doppio che dà l'area a(R) di una regione piana *R* si può esprimere nella forma:

$$a(R) = \iint_R dxdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

dove P=P(x,y) e Q=Q(x,y) sono tali che

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Per esempio se nella formula che specifica il teorema di Green prendiamo **F**=x**j** abbiamo:

$$\iint_R dxdy = \oint_C xdy$$

pertanto se Q=x e P=0 si ottiene

$$a(R) = \oint_C xdy$$

Se prendiamo F=-y**j** abbiamo:

$$\iint_R dxdy = -\oint_C ydx$$

pertanto se Q=0 e P=-y si ottiene

$$a(R) = -\oint_C ydx$$

Infine, da quanto precede, si evince anche la formula

$$a(R) = \frac{1}{2}\oint_C - ydx + xdy \,.$$

Esempio N°2

Applicare il teorema di Green per calcolare l'integrale

$$I = \oint_C y^2\,dx + x\,dy$$

dove *C* è la curva di equazioni parametriche

$$x = \sqrt{2}\cos^3 t\,,\quad y = \sqrt{2}\sin^3 t \qquad\qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Svolgimento

Per il teorema di Green è

$$I = \oint_C y^2\,dx + x\,dy = \iint_D (1-2y)\,dx\,dy = \iint_D dx\,dy$$

in quanto, per simmetria è

$$\iint_D y\,dx\,dy = 0\,.$$

Risulta

$$\iint_D dx\,dy = 4\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2}\sin^3 t} dy = 4\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sin^3 t\,dx$$

da cui, tenuto presente che $x = \sqrt{2}\cos^3 t$ e $0 \le t \le 2\pi$, si ha

$$\iint_D dx\,dy = 24\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\left(1-\sin^2 t\right)dt\,.$$

Utilizzando la formula di ricorrenza (che si deduce integrando per parti)

$$\int \sin^k t\,dt = -\frac{\cos t\,\sin^{k-1} t}{k} + \frac{k-1}{k}\int \sin^{k-2} t\,dt$$

si ottiene che

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\,dt = \frac{3}{16}\pi\,,\qquad \int_0^{\pi/2} \sin^6 t\,dt = \frac{5}{32}\pi$$

quindi

$$I = \oint_C y^2\,dx + x\,dy = 24\left(\frac{3}{16} - \frac{5}{32}\right)\pi = \frac{3}{4}\pi\,.$$

Oppure

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\,\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\left(\sin^2 t\,\cos^2 t\right)dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,\frac{\sin^2 2t}{4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos 2t\right)\sin^2 2t\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{\pi}{32}$$

TEOREMA DI STOKES

Il teorema di Stokes costituisce una generalizzazione del teorema di Green relativa a superfici dello spazio tridimensionale non necessariamente piane.

Sia S una superficie orientata dello spazio tridimensionale, liscia a pezzi, avente campo normale unitario $\hat{\mathbf{n}}$ il cui contorno *C* consiste di una o più curve chiuse, continue a pezzi con orientazione ereditata da S. Se ***F*** è un campo vettoriale liscio, definito su un insieme aperto contenente S, allora:

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Stabiliremo la validità della formula per una superficie liscia S che abbia una proiezione normale biunivoca sul piano *xy* e che il campo della sua normale unitaria punti verso l'alto. Pertanto su S, *z* è una funzione di classe C^1, definita per (x,y) appartenente a una regione *R* del piano xy : *z* = f (x,y).

I contorni *C* di S e C^* di *R* sono entrambi orientati in senso antiorario, guardando dall'alto lungo l'asse *z*.In questo caso è:

$$\hat{\mathbf{n}}\,dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)dx\,dy$$

Pertanto:

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iint_R\left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right]dA$$

Poiché *z* è una funzione di x e y,su *C* abbiamo

$$\mathrm{dz} = \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\,\mathrm{dy}\,.$$

Quindi: $$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{C^*}\left[F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\right] =$$

$$\oint_{C^*}\left[\left(F_1(x,y,z)+F_3(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(F_2(x,y,z)+F_3(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right].$$

Applicando ora il teorema di Green nel piano *xy* e ricordando che z è funzione di *x* e *y* otteniamo:

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[F_2(x,y,z) + F_3(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[F_1(x,y,z) + \left(F_3(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] \right) dA =$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + F_3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - F_3\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) dA =$$

$$= \iint_R \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right)\left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dA =$$

$$= \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

La dimostrazione è così completata.

OSSERVAZIONE Se $\nabla\times\mathbf{F} = 0$ in un dominio *D* dotato della proprietà che ogni curva chiusa semplice e liscia a pezzi contenuta in *D*, allora il teorema di Stokes assicura che $\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ per *qualunque* curva *C* di questo tipo, per cui **F** deve essere conservativo. Un dominio semplicemente connesso *D* ha effettivamente la proprietà appena specificata: una curva chiusa C di un dominio semplicemente connesso *D* è la frontiera di una superficie di *D*.

Come per il teorema della divergenza, l'importanza maggiore del teorema di Stokes risiede nell'essere uno strumento teorico. Tuttavia esso permette di semplificare il calcolo di integrali di circuitazione come illustrato dai seguenti esempi.

ESEMPIO N° 1

Calcolare $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ dove $\mathbf{F} = -y^3\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j} - z^3\,\mathbf{k}$, e *C* è la curva d'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e del piano $2x + 2y + z = 3$, orientata in modo da avere una proiezione con orientamento antiorario sul piano xy.

Svolgimento

C è il contorno orientato di un disco ellittico **D** che si trova nel piano 2x + 2y + z = 3 e che ha il disco circolare *R*: $x^2 + y^2 \leq 1$ come proiezione sul piano *xy*. Su *S* abbiamo

$$\hat{\mathbf{n}}\, dS = (2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dx\,dy,$$

inoltre

$$\nabla \times \mathbf{F} = 3\left(x^2 + y^2\right) \mathbf{k}$$

Quindi per il teorema di Stokes

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_R 3(x^2 + y^2)\, dx\, dy = 2\pi \int_0^1 3\rho^2 \rho\, d\rho = \frac{3\pi}{2}$$

ESEMPIO N° 2

Calcolare $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, dove:

$$\mathbf{F} = ye^x\ \mathbf{i} + \left(x + e^x\right) \mathbf{j} + z^2\ \mathbf{k}$$

C: $x = 1 + \cos t \qquad y = 1 + \sin t \qquad z = 1 - \sin t - \cos t \quad t \in [0, 2\pi]$

Svolgimento

i) Per il teorema di Stokes è

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times F \cdot \hat{\mathbf{n}}\, ds$$

Dove S è la parte del piano di equazione $z = 3 - x - y$ interna al cilindro di equazione: $x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \sin t \quad t \in [0, r\pi]$.

Pertanto essendo

$$\hat{\mathbf{n}}\, dS = \left(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{k}$$

Si evince che

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times F \cdot \hat{\mathbf{n}}\, ds = \iint_T dx\, dy = \pi$$

Dove T è la proiezione di S sul piano xy ovvero $\left\{(x, y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\right\}$

ii) Osservato che $\mathbf{F} = \left(ye^x\ \mathbf{i} + e^x\ \mathbf{j} + z^2\ \mathbf{k}\right) + x\ \mathbf{j} = \mathbf{F}_1 + x\ \mathbf{j}$ e che $\mathbf{F}_1$ è conservativo, segue che

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{r} + \oint_C x\,dy = \int_0^{2\pi}(1+\cos t)\cos t\,dt = \pi$$

iii) $$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C ye^x\,dx + (x+e^x)\,dy + z^2\,dz$$

$$\int_0^{2\pi}\left\{-e(1+\sin t)e^{\cos t}\sin t + \left(1+\cos t + ee^{\cos t}\right)\cos t + [1-(\sin t-\cos t)]^2(\sin t-\cos t)\ \right\}dt =$$

$$ee^{\cos t}\Big|_0^{2\pi} - e\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin^2 t\,dt + \pi + e\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos t\,dt = \pi$$

In quanto

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos t\ dt = \sin t\ e^{\cos t}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin^2 t\ dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin t\,dt$$

$$\int_0^{2\pi}\left[1-(\sin t+\cos t)\right]^2(\sin t-\cos t)\,dt = 0\,.$$

ESEMPIO N° 3

Disegnare la curva $C:\mathbf{r}(t) = \sin t\ \mathbf{i} + \sin 2t\ \mathbf{j}$ $\quad 0\le t\le 2\pi$ $\quad$ e calcolare

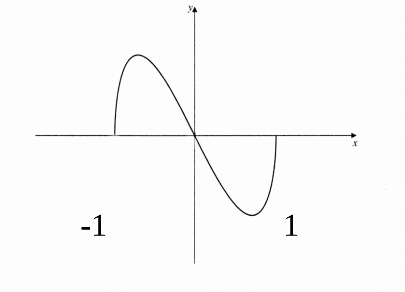
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{F} = ye^{2x}\ \mathbf{i} + x^3e^y\ \mathbf{j}$$

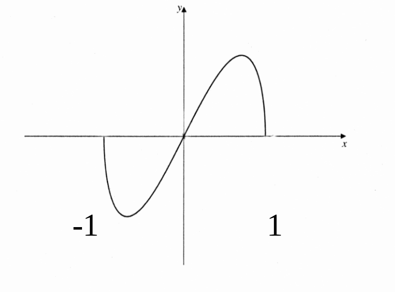
Svolgimento

Da $x=\sin t$ e $y=\sin 2t = 2\sin t\cos t$ segue $x=\sin t, y/2x=\cos t$. Da cui $x^2+y^2/4x^2=1$

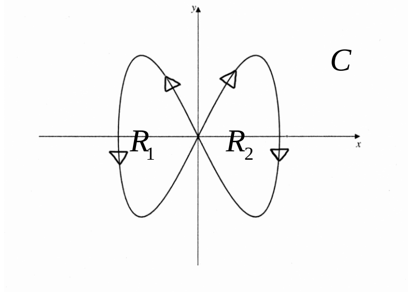
Ovvero $y=-2x\sqrt{1-x^2}$ $\qquad y=2x\sqrt{1-x^2}$

I cui grafici sono rispettivamente:





$\Rightarrow$



Dunque C è la frontiera di una regione R unione di due regioni R_1 e R_2. Osservato che

$$t=0 \to (0,0), \quad t=\frac{\pi}{4} \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right), \quad t=\frac{\pi}{2} \to (1,0) \quad t=\frac{3}{4}\pi \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right),$$

$$t=\pi \to (0,0), \quad t=\frac{5}{4}\pi \to \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right), \quad t=\frac{3}{2}\pi \to (-1,0), \quad t=2\pi \to (0,0)$$

Si evince che la frontiera di R_1 è percorsa a partire da (0,0) nel verso positivo (antiorario), le frontiere di R_2 è percorsa nel verso negativo (orario).

Allora su R_1 è $\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{k}$, su R_2 è $\hat{\mathbf{n}}=-\mathbf{k}$

Poiché R_1 e R_2 sono simmetriche rispetto all'asse *y* e

$$rot\ \mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=\left(3x^2e^y-e^{x^2}\right)\mathbf{k}$$

è pari in *x*, abbiamo

$$\iint_{R_1}\nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS=-\iint_{R_2}\nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

Quindi

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\iint_R \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_{R_1}\quad+\iint_{R_2}\quad=0$$

ESEMPIO N° 4

Se C è il contorno orientato positivamente di una regione piana R avente area A e centroide $(\overline{x},\overline{y})$, interpretare geometricamente l'integrale di linea

$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ dove: *a)* $\mathbf{F}=x^2\ \mathbf{j}$; *b)* $\mathbf{F}=xy\ \mathbf{j}$; *c)* $\mathbf{F}=y^2\ \mathbf{i}+3xy\ \mathbf{j}$.

Svolgimento

Per il teorema di Stokes (essendo R una regione piana) ho

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA$$

Allora

a) $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\iint_R 2x\,dA=2A\overline{x}$

b) $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\iint_R -x\,dA=-A\overline{x}$

c) $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (3y-2y)\, dA = A\bar{y}$

ESEMPIO N° 5

Calcolare

$$\oint_C (xy\, dx + yz\, dy + zx\, dz)$$

lungo il contorno del triangolo con vertici (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), orientato in senso orario guardandolo dal punto(1,1,1).

Svolgimento

C giace sul piano $z = 1 - x - y$ ed è il contorno di quella parte *S* del piano la cui proiezione sul piano *xy* è il dominio limitato *T* che ha come frontiera il triangolo con vertici (1,0), (0,1) e (0,0). Ovviamente

$$\oint_C xy\, dx + yz\, dy + zx\, dz = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}\,.$$

Per il teorema di Stokes è

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Essendo

$\nabla\times\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k}$, $\quad \hat{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ e $dS = \sqrt{3}\, dx\, dy$ e tenuto presente che su *S* è

$x + y + z = 1$, si ha

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)\, dS = \iint_T dx\, dy = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$\oint_C xy\, dx + yz\, dy + zx\, dz = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO N° 6

Calcolare

$$\oint_C (y\, dx - x\, dy + z^2\, dz)$$

Lungo la curva C d'intersezione delle superfici cilindriche $z = y^2$ e $x^2 + y^2 = 4$; la curva è orientata in senso antiorario vista dall'alto lungo l'asse z.

Svolgimento

La curva C è il contorno di quella parte S della superficie cilindrica $z = y^2$ la cui proiezione T sul piano xy è il disco $x^2 + y^2 \le 4$. Ovviamente

$$\oint_C y\,dx - x\,dy + z^2\,dz = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{F} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

Per il teorema di Stokes è

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS$$

essendo

$$\nabla \times \mathbf{F} = -2\,\mathbf{k}, \qquad \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \qquad \text{e} \qquad dS = \sqrt{5}\,dx\,dy$$

risulta

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS = \iint_S \frac{-2}{\sqrt{5}}\,dS = -2\iint_T dx\,dy = -2\left(4\pi\right):$$

quindi

$$\oint_C y\,dx - x\,dy + z^2\,dz = -8\pi\,.$$

ESEMPIO N° 7

Calcolare

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS$$

Dove S è la semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con normale esterna crescente e

$$\mathbf{F} = 3y\,\mathbf{i} - 2xz\,\mathbf{j} + \left(x^2 - y^2\right)\mathbf{k}$$

Svolgimento

Il contorno C di S ovvero la circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$ e anche il contorno del disco $T : x^2 + y^2 \le a^2$ e $z = 0$. Allora

$$\iint_T \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_T \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\, dA$$

essendo $(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = -3z-3$ e $z=0$ su T segue che

$$\iint_T \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\, dA = \iint_T dx\, dy = -3\pi a^2 .$$

ESEMPIO 8

Calcolare

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Dove S è la superficie $x^2+y^2+2(z-1)^2=6, \quad z\geq 0$, $\hat{\mathbf{n}}$ è la normale esterna (rispetto all'origine) su S, e

$$\mathbf{F} = \left(xz - y^3\cos z\right)\mathbf{i} + x^3e^z\ \mathbf{j} + xyz\ e^{x^2+y^2+z^2}\ \mathbf{k}$$

Svolgimento

Il contorno C di S ovvero $x^2+y^2=4$ è anche il contorno del disco $T: x^2+y^2\leq 4$ e $z=0$.

Allora

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \oint_C F\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\, dA$$

Essendo

$\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = 3x^2e^z + 3y^2\cos z$ e $z=0$ su T segue che

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\, dA = 3\iint_T \left(x^2+y^2\right)dx\, dy$$

Da cui, usando le coordinate polari, si ha

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = 3\int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^2 \rho^3\ d\rho = 24\pi$$

ESEMPIO N° 9

Sia C la curva

$$\begin{cases} (x-1)^2 + 4y^2 = 16 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$$

orientata in senso antiorario quando guardata dall'alto dall'asse z. Sia

$$\mathbf{F} = \left(z^2 + y^2 + \sin x^2\right)\mathbf{i} + \left(2xy + z\right)\mathbf{j} + \left(xz + 2yz\right)\mathbf{k}\,.$$

calcolare

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Svolgimento

C è la frontiera, orientata nel verso antiorario, del disco ellittico S che sta sul piano $2x + y + z = 3$, ovvero sul piano $z = -2x - y + 3$. S ha normale unitaria

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

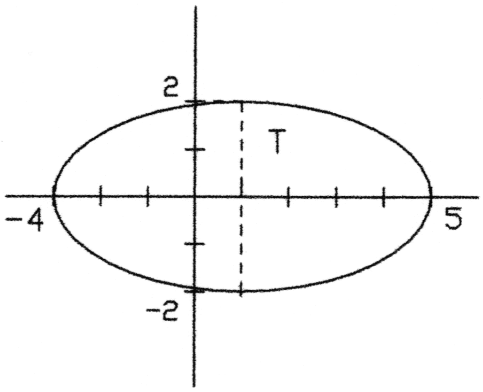
Essendo

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(2z - 1\right)\mathbf{i} + z\,\mathbf{j}$$

Si ha

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_S \frac{\left(5z - 2\right)}{\sqrt{6}}\, dS\, \mathbf{F}$$

Osservato che S ha una proiezione biunivoca su T: $\dfrac{\left(x-1\right)^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} \le 1$ la cui area è $4 \cdot 2 \cdot \pi = 8\pi$



segue che

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_T \frac{1}{\sqrt{6}}\left[5\left(3 - 2x - y\right) - 2\right]\sqrt{6}\, dx\, dy = \iint_T \left(13 - 10x - 5y\right) dx\, dy$$

Osservato che le coordinate del centroide di T sono $\bar{x} = 1$ e $\bar{y} = 0$, si evince che

$$\iint_T y\, dx\, dy = 0 \qquad\qquad \iint_T x\, dx\, dy = 1$$

quindi

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_T (13-10x)\, dx\, dy = 13(\text{area di T}) - 10\overline{x}(\text{area di T})$$

ESEMPIO N° 10

Mediante il teorema di Stokes dimostrare che

$$\oint_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = \sqrt{3}\pi a^2$$

Dove C è l' intersezione, orientata convenientemente, delle superfici:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \;\text{ e }\; x+y+z=0.$$

Svolgimento

Il cerchio C, intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ con il piano $x+y+z=0$, è la frontiera del disco *D* che sta sul piano $x+y+z=0$.

Osservando che

$$\oint_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = \oint_C (y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

(ovviamente è $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$) per il teorema di Stokes risulta:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_D \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D (-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Essendo su *D* (che sta sul piano di equazione $z=-x-y$)

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

segue che

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \sqrt{3}\iint_D dS = \sqrt{3}\pi a^2$$

Si è tenuto conto del fatto che l'integrale al secondo membro è l'area del disco *D*. Ignorando ciò si può procedere come segue. Poiché

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x^2+2y^2+2z^2=a \\ z=-(x+y) \end{cases}$$

Segue che il disco *D* si proietta sul piano xy nel dominio T la cui frontiera è la conica di equazione

$$2x^2+2y^2+2xy=a^2 \tag{3}$$

Ricordando (vedi rotazione di assi coordinati) che un' equazione del tipo

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad B\neq 0 \tag{4}$$

in un sistema di coordinate u,v ottenuto rotando (intorno all'origine) gli assi x,y di un angolo θ tale che

$$\text{cotg } 2\theta = \frac{\text{A - B}}{\text{B}}$$

assume la forma

$$au^2+cv^2+du+ev+f=0$$

ottenuta sostituendo le equazioni della rotazione degli assi:

$$\begin{cases} x=u\cos\theta - v\sin\theta \\ y=u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

nell'equazione (2) ne consegue che le equazioni (vedi Osservazione*)

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u-v) \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u+v) \end{cases}$$

trasformano l' equazione (1) nell'equazione

$$\frac{u^2}{\left(a/\sqrt{3}\right)^2}+\frac{v^2}{a^2}=1$$

ovvero in una ellisse di area $\frac{a}{\sqrt{3}} a\pi$.

Quindi

$$\sqrt{3}\iint_T dS = \iint_T dxdy = 3\frac{a^2}{\sqrt{3}}\pi = \sqrt{3}\pi a^2$$

(*) Osservazione. Nel caso dell' equazione

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 = a^2$$

è $\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{\pi}{2}$ quindi $\theta = \frac{\pi}{4}$.