Teorema della Divergenza (di Gauss)

Sia D un dominio tridimensionale regolare, la cui frontiera ∂D è una superficie chiusa S orientata con campo normale unitario $\hat{\mathbf{n}}$ uscente da D.
Se

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\ \mathbf{i} + F_2(x,y,z)\ \mathbf{j} + F_3(x,y,z)\ \mathbf{k}$$

è un campo vettoriale liscio definito su D, allora

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\ dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ dS$$

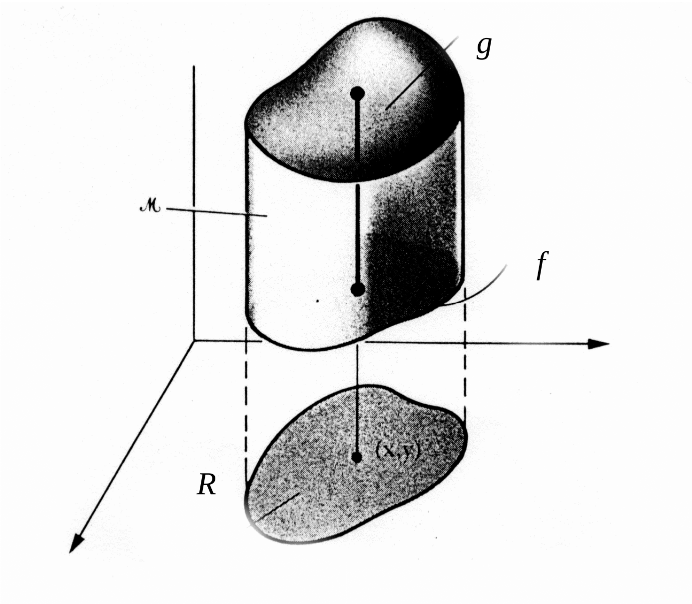
Dimostrazione

Incominciamo a calcolare il flusso di un campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_3(x,y,z)\ \mathbf{k}$$

parallelo all' asse z uscente da una superficie orientabile chiusa S liscia a pezzi che è il contorno di un dominio D z-semplice .
Poiché D è z-semplice , tale dominio è compreso tra i grafici di due funzioni $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ definite su una regione connessa e limitata R del piano *xy*. Se supponiamo $f(x, y) \leq g(x, y)$ allora

$$(x, y, z) \in D \iff (x, y) \in R \quad \text{e} \quad f(x, y) \leq z \leq g(x, y)$$



Supposto f e g di classe $C^1(R)$, la superficie S consiste di una parte inferiore S_1, di una parte superiore S_2 definite rispettivamente dalle equazioni $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ ed

eventualmente da una parte S_3 del cilindro verticale che passa per la frontiera di R .
Calcoliamo

$$\oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il campo normale unitario di S uscente da D . Essendo sulla superficie laterale S_3 $\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$ risulta

$$\oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS + \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Poiché su S_2 è :

$$\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \mathbf{k}\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\,dy = dx\,dy$$

mentre su S_1 è :

$$\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \mathbf{k}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) dx\,dy = -dx\,dy$$

risulta :

$$\oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \oiint_S F_3(x,y,z)\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_R \left[F_3(x,y,g(x,y))\right] dx\,dy - \iint_R \left[F_3(x,y,f(x,y))\right] dx\,dy =$$

$$= \iint_R \left[\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\right] dx\,dy = \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z}\; dx\,dy\,dz$$

E’ evidente ora che se D è x-semplice possiamo usare lo stesso tipo di ragionamento per dimostrare l’identità

$$\oiint_S F_1\;\; \mathbf{i}\cdot\hat{\mathbf{n}}\;\; dS = \iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x}\; dx\,dy\,dz$$

mentre se D è un dominio y-semplice l’identità è

$$\oiint_S F_2\;\; \mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{n}}\;\; dS = \iiint_D \frac{\partial F_2}{\partial y}\; dx\,dy\,dz$$

Pertanto se D è un solido *x-y-z* semplice, la cui frontiera S è una superficie chiusa, orientabile e liscia a pezzi e se

$$\mathsf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\;\;\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\;\;\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\;\;\mathbf{k}$$

è un campo vettoriale di classe $C^1(D)$ allora

$$\iiint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\ dy\ dz\ = \oiint_S\ (F_1\ \ \mathbf{i}+F_2\ \ \ \mathbf{j}+F_3\ \ \ \mathbf{k})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

ovvero

$$\iiint_D\ div\,\mathbf{F}\,dV\ \ = \oiint_S\ \mathbf{F}\cdot\,\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

Ora supponiamo che D sia l’unione di due domini D_1 e D_2 x-y-z semplici che non si sovrappongono e che la frontiera S viene divisa in S_1 e S_2 dalle superficie S^* che taglia D in D_1 e D_2 . Ovviamente S^* è parte del contorno sia di D_1 che di D_2 . Poiché il teorema vale per entrambi i domini D_1 e D_2 abbiamo:

$$\iiint_{D_1}\ \nabla\cdot\mathbf{F}\ dV = \oiint_{S_1\cup S^*}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS$$

$$\iiint_{D_2}\ \nabla\cdot\mathbf{F}\ dV = \oiint_{S_2\cup S^*}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\ dS$$

da cui

$$\iiint_D\ \nabla\cdot\mathbf{F}\ dV = \iiint_{D_1}\ \nabla\cdot\mathbf{F}\ dV + \iiint_{D_2}\ \nabla\cdot\mathbf{F}\ dV =$$

$$= \iint_{S_1}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS + \iint_{S^*}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS + \iint_{S_2}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\ dS + \iint_{S^*}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

Poiché le normali esterne $\hat{\mathbf{n}}_2$ e $\hat{\mathbf{n}}_1$, rispettivamente dei domini D_1 e D_2 puntano in direzioni opposte sui due lati di S^*, i contributi provenienti da S^* si elidono, pertanto risulta

$$\iiint_D\ \nabla\cdot\mathbf{F}\ dV = \iint_{S_1}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS + \iint_{S_2}\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\ dS = \iint_S\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

Iterando il procedimento precedentemente si evince la validitá del teorema al caso in cui D è regolare ovvero è l’unione finita di domini *x-y-z* semplici che non si sovrappongono.

Vale il seguente

Teorema. Siano: $B(r)$ una sfera solida di raggio r e con centro in P_0; S la frontiera di $B(r)$; $\hat{\mathbf{n}}$ la normale unitaria esterna di S; $|B(r)|$ il volume di $B(r)$. Allora

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(r)|} \oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = (grad\,\mathbf{F})(P_0).$$

Dimostrazione.

Dobbiamo dimostrare che dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\left| \varphi(P_0) - \frac{1}{|B(r)|} \oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS \right| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } 0 < r < \delta .$$

Dove $\varphi(P) = (grad\,\mathbf{F})(P)$. Poiché φ è continua in P_0, in corrispondenza di $\varepsilon > 0$ esiste una sfera $B(P_0;\delta)$ tale che

$$|\varphi(P) - \varphi(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni } P \in B(P_0;\delta).$$

Se scriviamo

$$\varphi(P_0) = \varphi(P) - [\varphi(P) - \varphi(P_0)]$$

ed integriamo questa equazione su una sfera $B(P_0, r)$ dove $0 < r < \delta$, abbiamo

$$\varphi(P_0)|B(r)| = \iiint_{B(r)} \nabla\cdot\mathbf{F}(P)\, dV - \iiint_{B(r)} [\varphi(P) - \varphi(P_0)]\, dV .$$

Da cui se applichiamo il teorema della divergenza al primo integrale del secondo membro, otteniamo

$$\left| \varphi(P_0) - \frac{1}{|B(r)|} \oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS \right| \le \frac{1}{|B(r)|}\, \frac{\varepsilon}{2}\, |B(r)| < \varepsilon \text{ per ogni } 0 < r < \delta .$$

La formula dimostrata nel teorema precedente cioè

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(P) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(r)|} \oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

in precedenza in alcuni testi di analisi vettoriale è presa come definizione di divergenza e fornisce la seguente interpretazione fisica della divergenza.

Supponiamo che **F** rappresenti il vettore densità di flusso di una corrente stazionaria. Allora come già visto, l'integrale superficiale

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

misura la massa totale di fluido che scorre attraverso *S* nell'unità di tempo nella direzione di $\hat{\mathbf{n}}$;
il rapporto

$$\frac{1}{|B(r)|} \oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

misura la massa per unità di volume che scorre attraverso δ nell'unità di tempo e nella direzione di $\hat{\mathbf{n}}$. Poiché il limite per $r \to 0$ del rapporto precedente è la divergenza di **F** in *P*, segue che:
la divergenza di **F** in un punto *P* può essere interpretata come la rapidità di variazione della massa per unità di volume e per unità di tempo in *P*.

Osservazioni importanti

Dal teorema di Gauss segue

1. Il flusso uscente da una superficie *S* (orientabile e liscia a pezzi) , di un campo vettoriale costante è uguale a 0

2. Qualunque sia la superficie chiusa *S* (orientabile e liscia a pezzi), è

$$\oiint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F}\, dS = 0$$

Ovvero

$$\oiint_S rot\, \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0$$

UNA APPLICAZIONE DEL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sia D un dominio regolare la cui frontiera è la superficie *S*. Se **F** è un campo vettoriale liscio, ϕ è un campo scalare liscio e ***c*** è un vettore costante arbitrario, allora applicando il teorema divergenza a $\mathbf{F}\, x\, \mathbf{c}$ e $\phi\mathbf{c}$, si ottengono rispettivamente le seguenti relazioni vettoriali:

i) $$\iiint_D \nabla \times \mathbf{F}\, dV = -\oiint_S \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

ii) $$\iiint_D \nabla\phi\, dV = -\oiint_S \phi\, \hat{\mathbf{n}}\, dS.$$

Osservazione

Formalmente la i) si ottiene da

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = -\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Sostituendo $\cdot$ con $\times$ e ponendo il segno meno al 2° membro;
la ii) sostituendo **F** con ϕ.

Il teorema della divergenza applicato a $\mathbf{F}\, x\, \mathbf{c}$ da

$$\iiint_D \nabla \times (\mathbf{F}\, x\, \mathbf{c})\, dV = -\oiint_S [(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{c} - (\nabla \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{F}]\, dV = \mathbf{c} \cdot \iiint_D (\nabla \times \mathbf{F})\, dV$$

$$\oiint_S (\mathbf{F}\, x\, \mathbf{c}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dV = -\oiint_S (\mathbf{c} \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -\oiint_S \mathbf{c} \cdot (\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}})\, dS = -\, \mathbf{c} \cdot \iiint_D (\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}})\, dS$$

segue che

$$\left(\iiint_D (\nabla \times \mathbf{F})\, dV + \oiint_S (\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}})\, dS \right) \cdot \mathbf{c} = 0$$

da cui, data l'arbitrarietà di $\mathbf{c}$, si evince che

$$\iiint_D (\nabla \times \mathbf{F})\, dV = -\oiint_S (\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}})\, dS \ .$$

Esempio 1

Verificare il teorema di Gauss nel caso in cui D è il dominio la cui frontiera σ è il tetraedro delimitato dai piani coordinati e dal piano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0;$$

e

$$\mathbf{F} = \nabla \Phi \quad \text{dove } \Phi = \Phi(x,y,z) = xy + z^2.$$

Svolgimento

Dobbiamo dimostrare che

$$\oiint_\sigma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dS$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ denota la normale unitaria esterna a σ . Ovviamente σ è costituita da $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ dove:
σ_1 è quella parte del piano di equazione

$$z = c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}) \quad (x,y) \in T$$

essendo T il triangolo di vertici (0,0,0), (a,0,0), (0,b,0);

σ_2 è il triangolo di vertici (0,0,0), (0,b,0), (0,0,c);

σ_3 è il triangolo di vertici (0,0,0), (a,0,0), (0,0,c);

σ_4 è il triangolo di vertici (0,0,0), (a,0,0), (0,b,0).
Poiché su σ_1 è

$$\hat{\mathbf{n}}\, dS = \left(\frac{c}{a}\ \mathbf{i} + \frac{c}{b}\ \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx\, dy$$

$$\mathbf{F} = \nabla\, \Phi = y\ \mathbf{i}\ + x\ \mathbf{j}\ + 2c\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \mathbf{k}$$

si ha

$$\iint_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ dS = \iint_T \left[\left(\frac{c}{b} - \frac{2c}{a} \right) x + \left(\frac{c}{a} - \frac{2c}{b} \right) y + 2c \right] dx\, dy = \frac{c}{6}(a+b)^2$$

Analogamente

$$\iint_{\sigma_2} \mathbf{F} \cdot (\,\mathbf{i}\,)\ dS = -\iint_{\sigma_2} y\, dy\, dz = -\frac{b^2 c}{6}$$

$$\iint_{\sigma_3} \mathbf{F} \cdot (\,\mathbf{j}\,)\ dS = -\iint_{\sigma_3} x\, dx\, dz = -\frac{a^2 c}{6}$$

$$\iint_{\sigma_4} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}\,)\ dS = \iint_{\sigma_4} 0\ dS = 0$$

Quindi

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ dS = \frac{c}{6}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2 \right] = \frac{abc}{3}\,.$$

Infine abbiamo

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_D 2\, dV = 2(\text{volume del tetraedro}) = 2\frac{1}{3}\ \frac{ab}{2}\, c = \frac{abc}{3}$$

Oppure integrando per fili

$$\iiint_D dV = c\iint_T \left(1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) dx\, dy = c\left(\frac{ab}{2} - \frac{ab}{6} - \frac{ab}{6} \right) = \frac{abc}{6}.$$

Esempio 2

Verificare il teorema di Gauss nel caso in cui

$$\mathbf{F} = (y + xz)\,\mathbf{i} + (y + yz)\,\mathbf{j} - (2x + z^2)\,\mathbf{k}\ ,$$

e

$$D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}.$$

Svolgimento

Dobbiamo dimostrare che

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint_\sigma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

dove σ è la frontiera del dominio D e $\hat{\mathbf{n}}$ denota la normale unitaria esterna alla superficie σ. La superficie σ consta di quattro parti:

$\sigma_1 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x \ge 0, y \ge 0 \text{ e } z \ge 0\}$;
$\sigma_2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0, y \ge 0\}$
$\sigma_3 = \{(y,z) : y^2 + z^2 \le a^2,\ y \ge 0, z \ge 0\}$
$\sigma_4 = \{(x,z) : x^2 + z^2 \le a^2,\ x \ge 0, z \ge 0\}$.

Su σ_1 è $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(x,y) \in T = \sigma_2$, pertanto

$$\hat{\mathbf{n}}\, dS = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx\, dy = \left(\frac{x}{z}\,\mathbf{i} + \frac{y}{z}\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx\, dy$$

e

$$\iint_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_T \left(\frac{xy + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + 2(x^2 + y^2) - 2x - a^2 \right) dx\, dy\,.$$

Passando a coordinate polari abbiamo

$$\iint_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_0^{\pi/2} \left(\sin\theta\cos\theta + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \int_0^a \rho^2 \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, d\rho\ +$$

$$+ \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \left(2\rho^3 - a^2\rho\right) d\rho - 2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^a \rho^2\, d\rho = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{a^3}{3}$$

Su σ_2 è $z = 0$ e $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{k}$, pertanto abbiamo

$$\iint_{\sigma_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\; dS = 2\iint_{\sigma_2} x\, dx\, dy.$$

Passando a coordinate polari si ha

$$\iint_{\sigma_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\; dS = 2\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{2a^3}{3}$$

Analogamente tenuto presente che su σ_3 è x = 0 e $\hat{\mathbf{n}}$ = - $\mathbf{i}$ si ottiene

$$\iint_{\sigma_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\; dS = -\iint_{\sigma_3} y\; dz\, dy = -\frac{a^3}{3}$$

Su σ_4 è y = 0 e $\hat{\mathbf{n}}$ = - $\mathbf{j}$, pertanto

$$\iint_{\sigma_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\; dS = \iint_{\sigma_4} 0\, dS = 0.$$

Quindi

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\; dS = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{a^3}{3} + \frac{2}{3}a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{\pi}{2}\,\frac{a^3}{3}.$$

Infine

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\; dV = \iiint_D dV = \frac{1}{8}(\text{volume della sfera}) = \frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi}{2}\,\frac{a^3}{3}$$

Oppure utilizzando le coordinate sferiche si ha :

$$\iiint_D dV = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\Phi\, d\theta \int_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{\pi}{2}\; 1\; \frac{a^3}{3} = \frac{\pi}{2}\,\frac{a^3}{3}.$$

Esempio 3

Verificare il teorema di Gauss nel caso in cui:

$$D = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 \right\}$$

$$i)\ \mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = x\ \mathbf{i} - 2y\ \mathbf{j} + 4z\ \mathbf{k}$$

$$ii)\ \mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = x^3\ \mathbf{i} + 3yz^2\ \mathbf{j} + \left(3y^2 z + x^2\right) \mathbf{k}$$

Svolgimento

E' opportuno usare le coordinate sferiche:

$$x = \rho \sin\phi \cos\vartheta, \quad y = \rho \sin\phi \cos\vartheta, \quad z = \rho \cos\phi$$

dove $0 \le \vartheta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le \rho \le a$.

Sul contorno σ del dominio D, ovvero sulla sfera di raggio a con centro nell'origine, vale:

$$\rho = a, \quad dS = a^2 \sin\phi\ d\vartheta\ d\phi, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{\mathbf{r}}{a} \quad \mathbf{r} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ indica la normale unitaria esterna a σ.

Inoltre l'elemento di volume, in coordinate sferiche, è:

$$dV = \rho^2 \sin\phi\ d\phi\ d\vartheta\ d\rho$$

Premesso ciò, bisogna dimostrare che:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\ dV = \oiint_\sigma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ dS$$

i) Risulta

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\ dV = 3 \iiint_D dV = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi\ a^3$$

$$\oiint_\sigma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ dS = \oiint_\sigma \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}}{a}\ dS = \iint_\sigma \frac{1}{a}\left(x^2 - 2y^2 + 4z^2\right)\ dS =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \left(\sin^2\phi \cos^2\vartheta - 2\sin^2\phi \sin^2\vartheta + 4\cos^2\phi\right) \sin\phi \, d\phi =$$

$$= -a^3 \, \pi \int_0^{\pi} (1-\cos^2\phi) \sin\phi \quad d\phi \, + \, 8\pi a^3 \int_0^{\pi} \cos^2\phi \sin\phi \quad d\phi = a^3 \pi \left(-\frac{4}{3} + \frac{16}{3} \right) = 4\pi a^3$$

ii) Risulta

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} = 3 \iiint_D \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \; dV = 3 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \sin\phi \quad d\phi \int_0^{a} \rho^4 \, d\rho = \frac{12}{5} a^5 \pi$$

$$\oiint_\sigma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oiint_\sigma \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}}{a} \, dS = \frac{1}{a} \iint_\sigma \left(x^4 + 6y^2 z^2 + x^2 z\right) dS$$

Osservato che il terzo degli integrali superficiali precedenti è nullo in virtù della simmetria, segue che

$$\oiint_\sigma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \frac{1}{a} \iint_\sigma \left(x^4 + 6y^2 z^2\right) dS = a^5 \int_0^{2\pi} \cos^4\vartheta \, d\vartheta \int_0^{\pi} \sin^4\phi \sin\phi \, d\phi +$$

$$+ 6a^5 \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta \int_o^{\pi} \sin^2\phi \, cos^2\phi \sin\phi \, d\phi = \frac{12}{5} a^5 \, \pi$$

Infatti risulta

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\vartheta \quad d\vartheta = \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\right)^2 d\vartheta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos 2\vartheta + \frac{1+\cos 4\vartheta}{2}\right) \; d\vartheta = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^4\phi \sin\phi \quad d\phi = \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos^2\phi + \cos^4\phi\right) \sin\phi \quad d\phi = \frac{16}{15}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2\phi \cos^2\phi \sin\phi \quad d\phi = \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2\phi\right) \cos^2\phi \sin\phi \quad d\phi = \frac{4}{15}$$

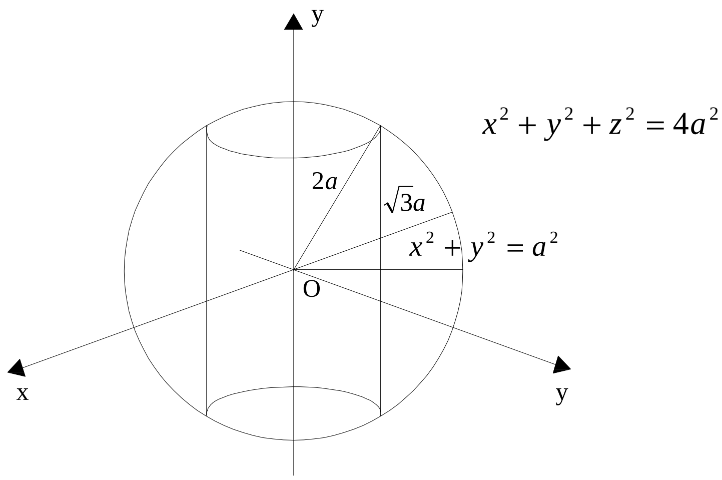
$$\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta \quad d\vartheta = \pi$$

Esempio 4

Verificare il teorema di Gauss nel caso in cui è

$$\mathbf{F} = (x + yz)\,\mathbf{i} + (y - xz)\,\mathbf{j} + (z - e^x \sin y)\,\mathbf{k}$$

$$D = \left\{ (x, y, z): \qquad x^2 + y^2 + z^2 \le 4a^2 \qquad x^2 + y^2 \le a^2 \right\}$$



Svolgimento

Dobbiamo verificare che

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint_\sigma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

La superficie σ ovvero la frontiera di D consiste di una parte cilindrica σ_1 e di una parte sferica σ_2. Pertanto

$$\oiint_\sigma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, dS_1 + \iint_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2\, dS_2$$

Dove: $\hat{\mathbf{n}}_1$ è la normale unitaria al cilindro verticale

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad |z| \le a\sqrt{3} \;;$$

$\hat{\mathbf{n}}_2$ è la normale unitaria esterna alla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 .$$

Usando le coordinate cilindriche, sulla superficie laterale della parte cilindrica è

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{F} \cdot \left[-\left(\cos\vartheta \, \mathbf{i} + \sin\vartheta \, \mathbf{j} \right) \right] =$$

$$= -\left[\left(a\cos\vartheta \;+\; za\sin\vartheta \right) \cos\vartheta + \left(a\sin\vartheta \;+\; za\cos\vartheta \right) \sin\vartheta \right] = -a$$

Quindi

$$\iint_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS_1 = -a \iint_{\sigma_1} dS_1 = -4\pi \, a^3 \sqrt{3}$$

Usando le coordinate sferiche, sulla parte sferica è

$$x = 2a\sin\phi\cos\vartheta \qquad y = 2a\sin\phi\sin\vartheta \qquad z = 2a\cos\phi$$

dove

$$0 \le \vartheta \le 2\pi \qquad\qquad \frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{\pi}{6}\pi ,$$

pertanto

$$\iint_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, dS_2 = \frac{1}{2a} \iint_{\sigma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \, dS_2 = 2a \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} 4a^2 \sin\phi \, d\phi = 16a^3\sqrt{3}\pi$$

Quindi

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS = 12a^3\pi\sqrt{3}$$

Infine, tenuto presente che l'elemento di volume in coordinate sferiche è

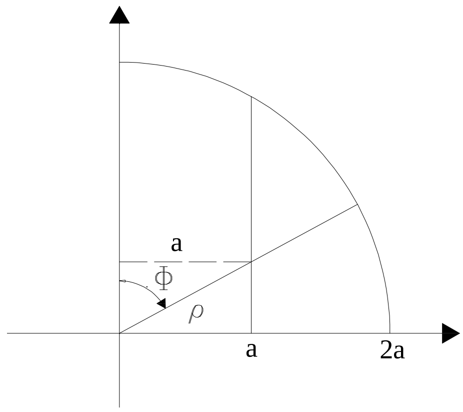
$$dV = \rho^2 \sin\phi \quad d\phi \quad d\vartheta \quad d\rho$$

Abbiamo

$$\iiint_D \nabla\cdot\ \mathbf{F}\ dV = 3 \iiint_D dV = 6\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \quad d\phi \int_{\frac{a}{\sin\phi}}^{2a} \rho^2 \quad d\rho = 12\sqrt{3}a^3\pi$$

Osservazione

L'equazione del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ in coordinate sferiche è



$$\rho^2 \sin^2\phi\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) = \vartheta^2 \quad \text{ovvero} \quad \rho^2\sin^2\phi = a^2$$

da cui $\rho = \dfrac{a}{\sin\phi}$

Esempio 5

Un dominio conico *D* con vertice in *(0,0,b)* e asse lungo l'*asse z* ha come base un disco *T* di raggio *a* sul piano *xy*. Determinare il flusso di:

$$\mathbf{F} = \left(x + y^2\right)\ \mathbf{i} + \left(3x^2 y + y^3 - x^3\right)\ \mathbf{j} + (z+1)\ \mathbf{k}$$

che attraversa la frontiera σ della parte conica del dominio *D* ovvero la superficie σ di equazione:

$$z = b - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \qquad\qquad b > 0$$

Soluzione

Utilizzando il *teorema di Gauss* abbiamo:

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS = \iiint_{D} \nabla\cdot\ \mathbf{F}\ dV - \iint_{T} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

Ora calcoliamo i due integrali alla destra della relazione precedente:

$$\iiint_{D} \nabla\cdot\ \mathbf{F}\ dV = \iiint_{D} \left[2 + 3\left(x^2 + y^2\right)\right] dV = \frac{2}{3}a^2 b\pi + 3\iiint_{D} \left(x^2 + y^2\right) dV$$

Essendo:

$$\iiint_{D} \left(x^2 + y^2\right) dV = \iint_{T} \left(x^2 + y^2\right)\left(b - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx\,dy$$

Utilizzando le coordinate polari si ottiene:

$$\iiint_{D} \left(x^2 + y^2\right) dV = b\int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^{a} \rho^2\left(1 - \frac{\rho}{a}\right)\rho\ d\rho = \frac{\pi b a^4}{10}$$

Oppure se indichiamo con *c(z)* il *disco*:

$$x^2 + y^2 \le \frac{a^2}{b^2}(b-z)^2 \qquad\qquad 0 \le z \le b$$

Si ha:

$$\iiint_D \left(x^2+y^2\right) dV = \int_0^b dz \iint_{c(z)} \left(x^2+y^2\right) dx\,dy = \int_0^b dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{b}(b-z)} \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi b a^4}{10}$$

Pertanto:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \; dV = \frac{2}{3} b a^2 \pi + \frac{3}{10} b a^4 \pi .$$

Ora tenuto presente che su T è $z=0$, abbiamo:

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \; dS = \iint_T \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \; dS = -\iint_T (z+1)\, dx\,dy = -\iint_T dx\,dy = -\pi a^2$$

Quindi:

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \; dS = \frac{2}{3} b a^2 \pi + \frac{3}{10} b a^4 \pi + \pi a^2$$

METODO DIRETTO

Su σ abbiamo:

$$\mathbf{F} = \left(x + y^2\right) \mathbf{i} + \left(3x^2 y + y^3 - x^3\right) \mathbf{j} + \left(1 + b - \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}\right) \mathbf{k}$$

e

$$\hat{\mathbf{n}} \; dS = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\,dy$$

Pertanto:

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_T \left[\frac{b}{a}\left(\frac{x^2+xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{3x^2y^2+y^4-x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+1+b-\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}\right]dx\,dy.$$

Osservato che per la simmetria (giustificare!) è:

$$\iint_T \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy = \iint_T \frac{x^3y}{x^2+y^2}\, dx\,dy = 0$$

Segue che:

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \frac{b}{a}\iint_T \left(\frac{x^2+3x^2y^2+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy+(1+b)\,\pi a^2 = \frac{b}{a}\iint_T \frac{3x^2y^2+y^4-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy$$

.

Utilizzando le coordinate polari si ottiene

$$\iint_T \frac{3x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy = 3\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\, d\vartheta\int_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{3}{4}\frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\vartheta\, d\vartheta = \frac{3}{4}\frac{a^5}{5}\pi$$

$$\iint_T \frac{y^4dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\, d\vartheta\int_0^a \rho^4\, d\rho = \frac{1}{4}\frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos 2\vartheta+\frac{1+\cos 4\vartheta}{2}\right) d\vartheta = \frac{a^5\pi}{5}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\iint_T \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy = \int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\, d\vartheta\int_0^a \rho^2\, d\rho = \pi\frac{a^3}{3}$$

Quindi

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \frac{b}{a}\left(\frac{3}{10}a^5\pi-\pi\frac{a^3}{3}\right)+(1+b)\pi a^2 = \frac{3}{10}ba^4\pi+\frac{2}{3}ba^2\pi\,.$$

Esempio 6

Sia σ quella parte della superficie cilindrica di equazione $y^2 + z^2 = 1$ che si trova nel 1° ottante compresa tra i piani x = 0 e x = 1.

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = 3xz^2\ \mathbf{i} - x\ \mathbf{j} - y\ \mathbf{k}$$

uscente da σ

Svolgimento

E' opportuno utilizzare le coordinate cilindriche; allora l'equazione di σ è $\rho = 1 \quad 0 \le x \le 1$.
La superficie σ interseca il piano yz nella curva C di equazioni parametriche

$$y = \cos\vartheta,\ z = \sin\vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$$

pertanto risulta $dS = d\vartheta$. Essendo sulla superficie laterale del cilindro

$$dS = d\vartheta\, dx, \quad \mathbf{F} = 3x\sin^2\vartheta\ \mathbf{i} - x\ \mathbf{j} - \cos\vartheta\ \mathbf{k}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \cos\vartheta\ \mathbf{j} + \sin\vartheta\ \mathbf{k}$$

Segue che su σ è

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS = (-x\cos\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta)\ d\vartheta\, dx$$

quindi

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS = -\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 (x\cos\vartheta + \cos\vartheta\sin\vartheta)\ dx = -1.$$

Oppure
se indichiamo con D il solido così definito:

$$D = \left\{ (x, y, z): \quad y^2 + z^2 \le 1, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0, \quad 0 \le x \le 1 \right\}$$

per il Teorema di Gauss risulta

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV - \iint_{\sigma_1} \mathbf{F}(-\mathbf{k})\, d\sigma_1 - \iint_{\sigma_2} \mathbf{F}(-\mathbf{i})\, d\sigma_2 - \iint_{\sigma_3} \mathbf{F}(-\mathbf{j})\, d\sigma_3 - \iint_{\sigma_4} \mathbf{F}\ (\mathbf{i})\, d\sigma_4$$

dove il significato di $\sigma_i \quad i = 1,2,3,4$ è ovvio.

Essendo

$$\iint_{\sigma_1} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})\, dS_1 = \iint_{\sigma_1} y \; dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^1 y \; dy = \frac{1}{2}$$

$$\iint_{\sigma_2} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{i})\, dS_2 = \iint_{\sigma_2} -3xz^2 \; dx\,dz = 0 \qquad \text{su } \sigma_2 \text{ è } z = 0$$

$$\iint_{\sigma_3} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{j})\, dS_3 = \iint_{\sigma_3} x \; dx\,dz = \int_0^1 dz \int_0^1 x \; dx = \frac{1}{2}$$

$$\iint_{\sigma_4} \mathbf{F}\cdot(\hat{\mathbf{i}})\, dS_4 = \iint_{\sigma_4} 3z^2 \; dx\,dz = 3\int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \; d\vartheta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{3}{16}\pi$$

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\; dV = 3\iiint_D z^2 \; dV = 3\int_0^1 dx \iint_{C(x)} z^2 \; dz\,dy$$

dove C(x) denota il disco $z^2 + y^2 \le 1, \quad z \ge 0, \quad y \ge 0$

pertanto

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\; dV = 3\int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \; d\vartheta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{3}{16}\pi$$

quindi

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\; dS = \frac{3}{16}\pi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{16}\pi = -1$$

Esempio 7

Verificare il teorema di Gauss nel caso in cui

$$D = \left\{ (x, y, z) \middle| \, x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq 4a^2, \quad z \geq 0 \right\}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^2 + y + 2 + z^2\right) \mathbf{i} + \left(e^{x^2} + y^2\right) \mathbf{j} + (3 + x)\, \mathbf{k}\, .$$

Svolgimento

La frontiera del dominio D è costituita da quella parte S della superficie sferica che sta sul piano $x\,y$:

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = 4a^2 \qquad z \geq 0$$

E dal disco $T:\ x^2 + y^2 \leq 3a^2, \quad z = 0$. Quindi dobbiamo verificare che

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv = \iint_T \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \; dA + \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} \; dS$$

A tale scopo calcoliamo separatamente i tre integrali dell'uguaglianza precedente.

i) Poiché D è simmetrico rispetto ai piani $x = 0$ e $y = 0$, risulta

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \; dv = \iiint_D (2x + 2y) dx\, dy\, dz = 0$$

ii)
$$\iint_T \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \; dS = -\iint_T (3 + x) dx\, dy = -3 \iint_T dx\, dy = -9\pi\, a^2$$

iii) Per calcolare

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

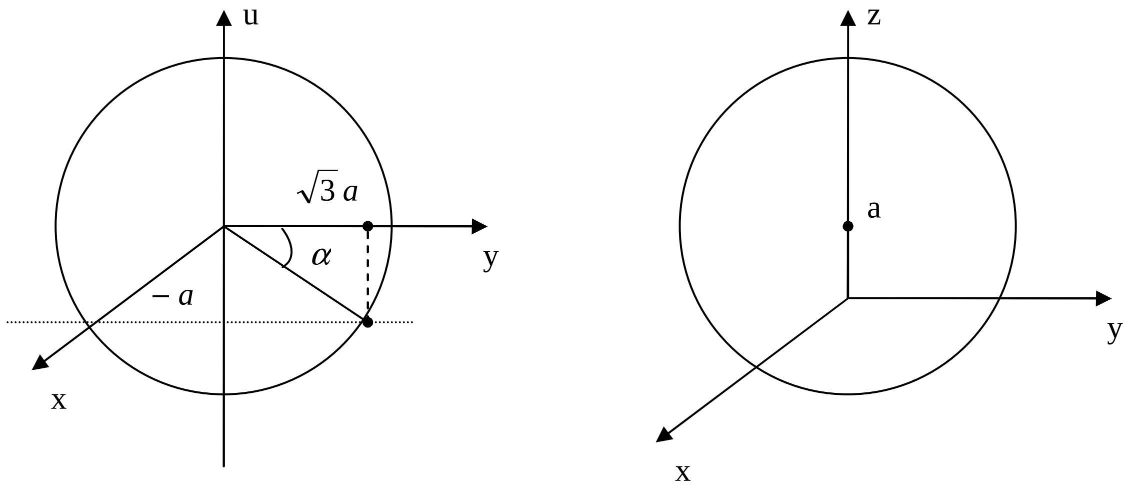
Facciamo il seguente cambiamento di variabili

$$x = x, \quad y = y \quad z = a + u$$

e poniamo $\mathbf{F}(x, y, a+u) = \mathbf{G}(x, y, u)$. Allora il valore del flusso dato dall'integrale precedente è uguale al flusso, del campo vettoriale $\mathbf{G}$, uscente da quella parte della sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + u^2 = 4a^2 \qquad u \geq -a$$

Ovvero che sta sul piano $u = -a$ (vedi figura).



Per il calcolo di

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{1}{2a} \iint_S G \cdot \left(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}\right) dS = \frac{3}{2a} \iint_S dS$$

Dove si è tenuto conto delle simmetrie gia menzionate, usiamo le coordinate sferiche. A tale scopo, tenuto presente che

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Si evince che $$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi\,.$$

Quindi

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 3\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 4a^2 \sin\phi \cos\phi \; d\phi = 9\pi\, a^2$$

Il che completa quanto volevamo verificare.