SUPERFICI

Definizione.

Sia T la chiusura di un aperto connesso limitato $A \subset R^2$ la cui frontiera ∂A è una curva semplice, chiusa, regolare a tratti. Una applicazione vettoriale:

$$\mathbf{r}: T \to R^3, \quad \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k} \qquad (u,v) \in T$$

che ha le seguenti proprietà:

1- $\mathbf{r}$ è continua su T
2- $\mathbf{r}$ è iniettiva in A

è per definizione una superficie parametrica in R^3 e si dice che le equazioni

$$x = x(u,v); \quad y = y(u,v); \quad z = z(u,v) \qquad (u,v) \in T$$

costituiscono una rappresentazione parametrica della superficie. Se in $(u_0, v_0) \in A$ esistono i vettori

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

si dicono regolari quei punti (u_0, v_0) in cui $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ risultino continui e

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

diversamente i punti si dicono singolari.
Pertanto se $\mathbf{r} \in C^1(A)$, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ in A, la superficie è detta liscia o regolare. Se una superficie S è liscia allora per ogni punto $(u_0, v_o) \in A$ le curve $\mathbf{r}(u_0, v)$ e $\mathbf{r}(u, v_0)$ su S sono curve regolari e nel loro punto di intersezione $P_0(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0) \in S$ i rispettivi vettori tangenti $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v)$ e non $\frac{\partial r}{\partial v}(u \;\; , v_0)$ sono paralleli. Il vettore

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0)$$

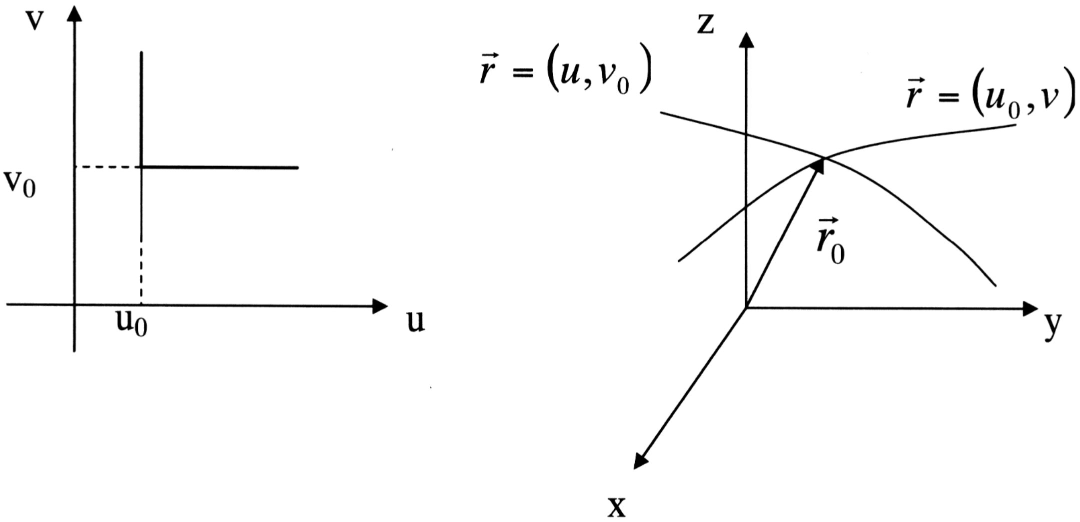
è un vettore normale alla superficie S in P_0, inoltre il piano passante per $P_0(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ $\in S$ e ortogonale al vettore $\boldsymbol{n}$, è per definizione il piano tangente a S in P_0 la cui equazione è :

$$(P-P_0)\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)(u_0,v_0)=0$$

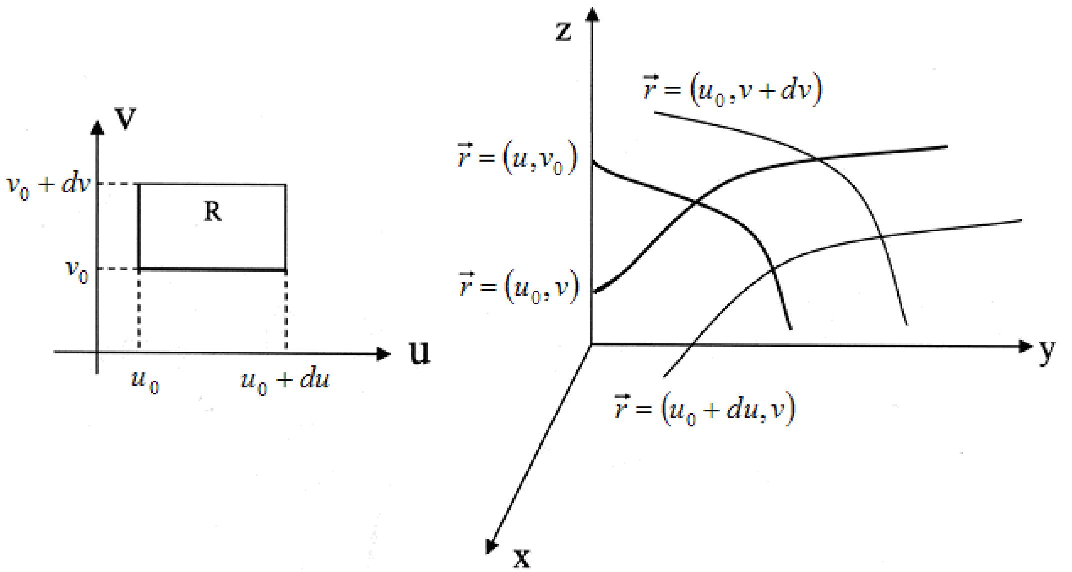
dove

$$(P-P_0)=(x-x_0)\ \mathbf{i}+\ (y-y_0)\ \mathbf{j}\ +\ (x-z_0)\ \mathbf{k}$$

Ovviamente le curve $\mathbf{r}(u_0,v)$ e $\mathbf{r}(u,v_0)$ sono le immagini dei segmenti per (u_0,v_0) e rispettivamente paralleli all'asse delle v e all'asse delle u.



Quando u varia di quantità du il punto P_0 si muove lungo la curve $\mathbf{r}=(u,v_0)$ di un tratto $|\mathbf{r}_u|\ du$; analogamente quando v varia di una quantità dv il punto P_0 si muove lungo la curva $\mathbf{r}=(u_0,v)$ di un tratto $|\mathbf{r}_v|\ dv$



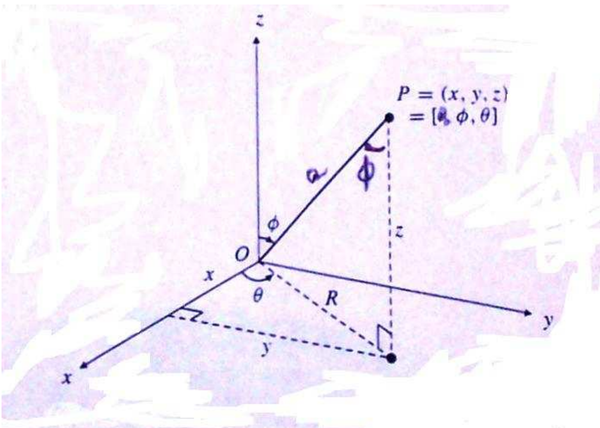
Da quanto precede si evince che $\mathbf{r}(u,v)$ trasforma un rettangolo R di area $du\,dv$ contenuto in A in un parallelogramma curvilineo che possiamo approssimare al parallelogramma individuato dai vettori $\mathbf{r}_u\ du$ e $\mathbf{r}_v\ dv$ la cui area è

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \; du\, dv$$

L'area $a(S)$ di tutta la superficie S è la somma di tutti gli elementi d'area *dS*:

$$a(S) = \iint_S dS = \iint_T |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du\, dv = \iint_T |n| \, du\, dv$$

Esempio 1



Coordinate sferiche di un punto

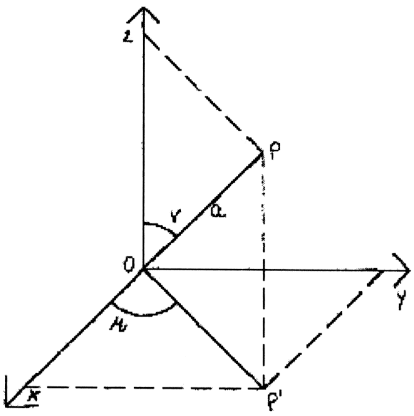
Le equazioni

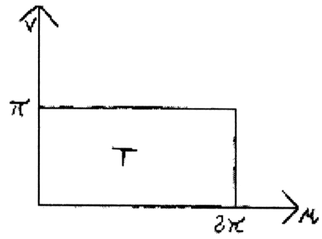
$$x = a \sin v \cos u, \quad y = a \sin v \sin u, \quad z = a \cos v \qquad (1)$$

ovvero l'equazione vettoriale

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = a \sin v \cos u \;\mathbf{i} + \; a \sin v \sin u \;\mathbf{j} \; + \; a \cos v \;\mathbf{k}$$

dove i punti *(u,v)* variano nel rettangolo $R = [0,2\pi] \times [0,\pi]$ forniscono una rappresentazione parametrica di una superficie sferica con centro nell'origine e di raggio *a*, non è difficile verificare che $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
I parametri *u* e *v* denotano rispettivamente le coordinate ϑ e Φ sulla sfera (*vedi figura*) .





La parametrizzazione considerata è iniettiva nel rettangolo aperto $0 < u < 2\pi$, $0 < v < \pi$, ma non sul rettangolo chiuso. Infatti i lati $v = 0$ e $v = \pi$ sono trasformati rispettivamente nei punti *(0,0,a)* e *(0,0,-a)* detti rispettivamente polo nord e polo sud; inoltre i lati $u = 0$ e $u = 2\pi$ sono trasformati negli stessi punti, precisamente nei punti $(a\sin v, 0, a\cos v)$ con $0 \le v \le \pi$.

La restrizione dell'equazione (1) al rettangolo $T = [0,2\pi]\times[0,\pi/2]$ è una rappresentazione parametrica dell'emisfero superiore. L'emisfero inferiore è l'immagine del rettangolo $[0,2\pi]\times[\pi/2,\pi]$.

Essendo

$$\frac{\partial x}{\partial v} = a\cos v\cos u \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = a\cos v\sin u \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -a\sin v$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -a\sin v\sin u \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = a\sin v\cos u \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v = a\sin v\ \mathbf{r}(u,v)$$

si evince che l'elemento d'area di una sfera di raggio *a* è:

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dv\,du = a^2\sin v\,dv\,du = a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

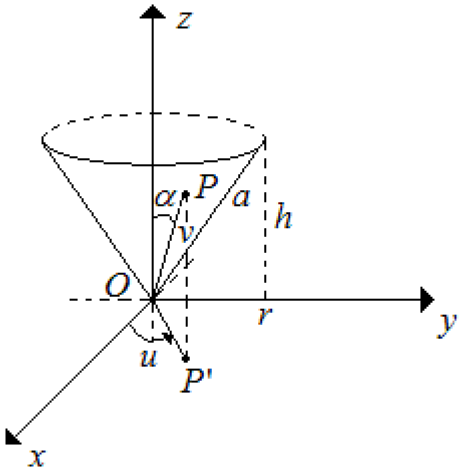
Quindi

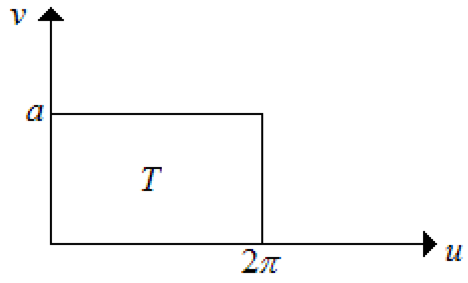
$$A(S) = \iint_T a^2\sin v\,dv\,du = a^2\int_0^{2\pi} du\int_0^{\pi}\sin v\,dv = 4\pi a^2$$

Esempio 2

CONO CIRCOLARE RETTO

Con riferimento alla figura seguente è:





$$OP = v, \quad OP' = v\sin\alpha, \quad r = a\sin\alpha, \quad h = a\cos\alpha, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Pertanto le equazioni parametriche di un cono circolare retto con angolo al centro 2α e di apotema a sono:

$$x = v\sin\alpha\cos u, \quad y = v\sin\alpha\sin u, \quad z = v\cos\alpha \qquad (1)$$

La corrispondente equazione vettoriale è:

$$\mathbf{r}(u,v) = v\sin\alpha\cos u\ \mathbf{i} + v\sin\alpha\sin u\ \mathbf{j} + v\cos\alpha\,\mathbf{k} \quad \text{dove} \quad 0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le a\,;$$

Essendo

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = v\sin\alpha\cos\alpha\cos u\,\mathbf{i} + v\sin\alpha\cos\alpha\sin u\ \mathbf{j} - v\sin^2\alpha\ \mathbf{k}$$

e quindi

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = v\sin\alpha \neq 0$$

sui punti interni di T si evince che la superficie conica considerata è regolare.
Elevando al quadrato le equazioni (1) si ottengono le equazioni:

$$x^2 + y^2 = v^2\sin^2\alpha \qquad\qquad z^2 = v^2\cos^2\alpha$$

da cui, essendo $\tan\alpha = \frac{r}{h}$, si ottiene:

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} z^2 \quad \text{dove} \quad \frac{r}{h} = \arctan\alpha . \qquad (2)$$

La (2) è l'equazione cartesiana del cono circolare retto di altezza h e raggio base r il cui angolo al centro è 2α dove $\alpha = \arctan\left(\frac{r}{h}\right)$.

Riassumendo quanto precede $b^2 z^2 = x^2 + y^2$ è l'equazione di un cono circolare retto con vertice in 0 e di angolo al centro 2α con $\alpha = \arctan b$.

Infine si osservi che l'equazione (2) risolta rispetto a z ha due soluzioni:

$$z = \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad z = -\frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2}$$

In altre parole l'equazione (2) è l'equazione cartesiana di due coni simmetrici rispetto al piano xy, i cui vertici coincidono con l'origine del riferimento cartesiano.
Infine

$$a(S) = \int_0^a v\,dv \int_0^{2\pi} \sin\alpha \, du = \pi a (a \sin\alpha) = \pi a r$$

Esempio 3

Sia $z = f(x, y),\ (x, y) \in T$ Se poniamo $x = u, y = v$ allora $z = f(u, v)$ .Se *f* è di classe $C^1(A)$ allora l'equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + f(u,v)\,\mathbf{k}, \qquad (u,v) \in T$$

rappresenta sempre una superficie parametrica regolare il cui dominio T è la proiezione biunivoca della superficie sul piano *xy*. Infatti essendo

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{k}$$

risulta

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Poiché la terza componente del vettore $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ è 1, il suo modulo non è mai nullo.
Quindi il grafico di una funzione $z = f(x, y)$ che risulta di classe $C^{(1)}$ nei punti interni al suo dominio *T* è sempre una superficie regolare. In questo caso l'equazione del piano tangente nel punto (x_o, y_0, z_0) dove $z_0 = f(x_0, y_0)$ è

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0);$$

l'area della superficie è:

$$a(S) = \iint_T |\, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \,|\, du\, dv = \iint_T \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)}\, dx\, dy$$

In particolare se $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ allora

$$a(S) = \iint_T \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = 2\pi a^2 \quad \text{dove} \quad T:\ x^2 + y^2 \le a^2 .$$

Se la superficie *S* giace su un piano parallelo al piano xy *(cioè sul piano z = costante)* allora:

$$a(S) = \iint_T dx\, dy = a(T)$$

dove T è la proiezione della superficie *S* sul piano xy.

Se la superficie *S* di equazione $z = f(x, y)$ è una superficie piana che giace su un piano che forma un angolo γ con il piano xy, allora l'angolo che il vettore **n** normale alla superficie forma con il versore **k** è uguale a γ, pertanto è:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 1 \ \text{e} \ \left|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\right| = \left|\mathbf{n}\right| \cos\gamma$$

da cui

$$i)\ \ |\mathbf{n}| = \frac{1}{\cos y}$$

$$ii)\ \ \frac{1}{\cos y} = \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

Utilizzando la *i)* e tenendo presente che γ è costante si ottiene:

$$a(S) = \iint_T \frac{1}{\cos\gamma}\,dx\,dy = \frac{1}{\cos\gamma}\iint_T dx\,dy = \frac{1}{\cos\gamma}\,a(T)$$

ovvero

$$a(T) = a(S)\cos\gamma\,.$$

L'equazione precedente è nota come ***principio del coseno delle aree***:

Se una superficie *S* giacente su un piano è proiettata ortogonalmente su un insieme *T* che giace su un piano che forma un angolo γ con il piano che contiene la superficie allora $a(T)$ è $\cos\gamma$ volte l'area di S.

La *i)* e la *ii)* sono valide anche nel caso in cui *S* è una superficie regolare che ha una proiezione biunivoca *T* sul piano *xy*. In questo caso l'angolo γ, che il vettore $\mathbf{n}$ normale alla superficie,forma con il versore $\mathbf{k}$,varia da punto a punto. Utilizzando *ii)* risulta

$$a(S) = \iint_T \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}\,dx\,dy$$

Ovviamente

$$a(S) = \iint_T \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}|}\,dy\,dz \qquad a(S) = \iint_T \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}|}\,dx\,dz$$

sono valide nel caso in cui una superficie regolare *S* ha una proiezione biunivoca *T* rispettivamente sul piano *yz* e sul piano *xz*.

Da quanto precede, segue che se una equazione del tipo $F(x,y,z)=0$ definisce implicitamente z in funzione di *(x,y)*, ovvero una superficie regolare *S* che si proietta biunivocamente in una regione *T* del piano *xy*, allora :

$$a(S) = \iint_T \frac{|\nabla F|}{|F_z|}\,dx\,dy$$

Osservazioni

1. La relazione precedente può essere dedotta anche nel modo seguente. Nelle ipotesi suddette risulta per il teorema delle funzioni implicite:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

pertanto

$$dS = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}\,dx\,dy = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2\right)}\,dx\,dy = \sqrt{\frac{(F_z)^2 + (F_x)^2 + (F_y)^2}{(F_z)^2}}\,dx\,dy$$

e quindi

$$a(S) = \iint_T \frac{|\nabla F|}{|F_z|}\,dx\,dy$$

2. Nel caso in cui la superficie S è specificata dall'equazione $z = f(x, y)$ per calcolare l'area si può utilizzare la forma implicita in quanto $z = f(x, y)$ può essere scritta come $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$

RIASSUMENDO

- *Forma parametrica:*

Se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ allora $a(S) = \iint_T |\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv \qquad (u, v) \in T$

- *Forma cartesiana*

Se $z = f(x, y)$ allora $a(S) = \iint_T \sqrt{(1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\,dx\,dy \qquad (x, y) \in T$

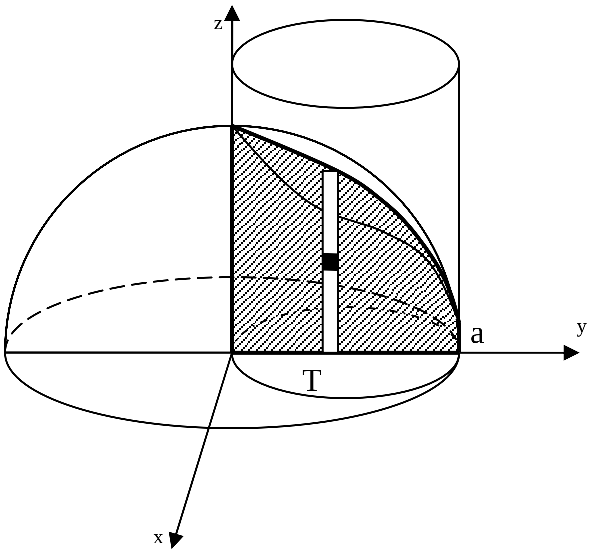
- *Forma implicita*

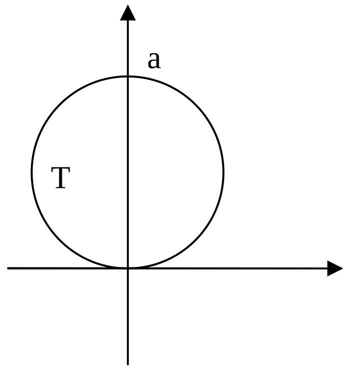
Se $F(x, y, z) = 0$ allora $a(S) = \iint_T \frac{|\nabla F|}{|F_z|}\,dx\,dy \qquad (x, y) \in T$

valida nel caso in cui la proiezione della superficie sul piano xy sia biunivoca.

Esempio 4

Calcolare l'area della porzione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = ay$.





Svolgimento

Un quarto dell'area richiesta si proietta sul piano xy nel semidisco

$$T = \left\{ (x, y) \mid x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x^2 + \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}.$$

Si deve calcolare:

$$a(S) = 4 \cdot \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}\, dx\, dy \quad \text{dove} \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ .$$

Allora, usando le coordinate polari, si ha:

$$a(S) = 4a \iint_T \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \sin\theta} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, d\rho = 2a^2 (\pi - 2)$$

Altro procedimento: Poniamo

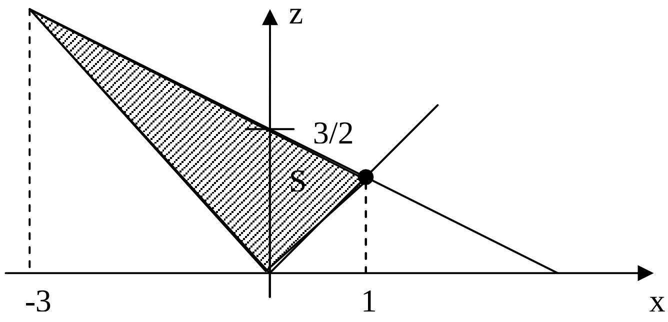
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

allora tenuto presente che su S è $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, abbiamo

$$a(S) = 4 \cdot \iint_T \frac{|\nabla F|}{|F_z|} dx\, dy = 4 \cdot \iint_T \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{|z|} = 4 \cdot \iint_T \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = 2a^2 (\pi - 2)$$

Esempio 5

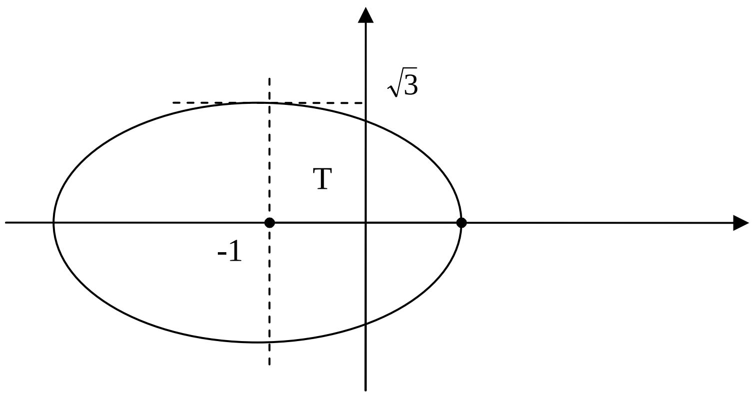
1. Calcolare l'area della superficie conica $z^2 = x^2 + y^2$ che si trova tra i piani $z = 0$ e $2z + x = 3$.



Svolgimento

La frontiera del dominio T sul quale si proietta la superficie S della quale si vuole calcolare l'area è data dall' intersezione della superficie conica con quella del piano:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ 2z + x = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{(3-x)^2}{4} \\ z = \dfrac{-x}{2} \end{cases} \qquad \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$



Se poniamo $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ allora $\nabla F = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}$.
Quindi

$$a(S) = \iint_T \frac{|\nabla F|}{|F_2|}dx\,dy = \iint_T \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2z}dx\,dy$$

da cui tenuto presente che su S è $z^2 = x^2 + y^2$ ovvero $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, si ottiene

$$a(S) = \sqrt{2}\iint_T dx\,dy = \sqrt{2}\,(2\sqrt{3}\pi) = 2\sqrt{6}\pi$$

Esempio 6

Calcolare l'area della parte della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interna al cilindro ellittico $2x^2 + y^2 = a^2$.

Svolgimento

Un ottavo dell'area richiesta si proietta sul piano xy nella parte T dell' ellisse che sta nel primo quadrante del piano xy.
Pertanto

$$a(S) = 8\iint_T \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \qquad \text{dove} \qquad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ .$$

Posto $\quad b(y) = \sqrt{\dfrac{a^2 - y^2}{2}} \quad$ si ha

$$a(S) = 8a\iint_T \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 8a\int_0^a dy \int_0^{b(y)} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= 8a\int_0^a \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}}\Bigg|_0^{b(y)} dy = 8a^2\,\frac{\pi}{4} = 2\pi a^2$$

Esempio 7

Calcoliamo l'area della superficie $z = \dfrac{1}{a}\left(x^2 + y^2\right)$ che sta sopra la lemniscata $4\rho^2 = a^2\cos 2\theta$.

Svolgimento

Un quarto dell'area richiesta si proietta sul piano xy nella parte T della lemniscata corrispondente a $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ e $0 \le \rho \le \dfrac{a}{4}\sqrt{\cos 2\theta} = b(\theta)$.
Usando le coordinate polari si ha

$$a(S) = 4\iint_T \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \frac{a}{4}\iint_T \sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + a^2}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{4}{a}\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{b(\theta)} \rho\sqrt{4\rho^2 + a^2}\,d\rho = \frac{1}{30}\int_0^{\pi/4} \left[\left(4\rho^2 + a^2\right)^{3/2}\right]_0^{b(\theta)} d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{3}\int_0^{\pi/4} \left(1 + \cos 2\theta\right)^{3/2} d\theta - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{a^2}{3}\left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

dove si è tenuto presente che $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$.

Esempio 8

Calcolare l'area della superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ che sta sopra la cardioide $\rho = 1 - \cos\theta$.

Svolgimento

L'area richiesta è due volte l'area della parte della superficie $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ la cui proiezione sul piano xy è il dominio T delimitato da $\rho = 1 - \cos\theta$ con $0 \le \theta \le \pi$.
Pertanto:

$$a(S) = 2\iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = 4\iint_T \frac{dx\, dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

da cui, passando a coordinate polari, si ottiene

$$a(S) = 4\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1-\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\, d\rho = 8\left(\pi - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin^4\frac{\theta}{2}}\, d\theta\right) = 8\left(\pi - \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta\right)$$

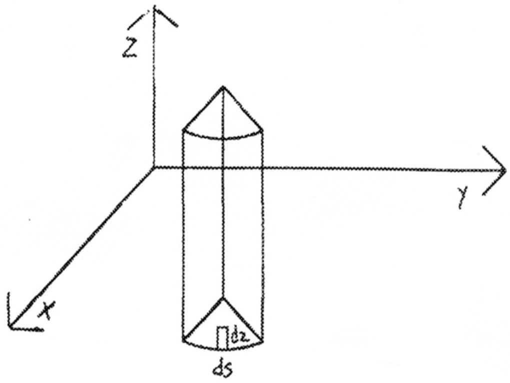
Ponendo
Sostituendo $sen\frac{\theta}{2} = u$ si ottiene

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 2\int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du = \sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

Quindi

$$a(S) = 8[\pi - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)].$$

Elemento d’area di una superficie cilindrica



L’elemento d’area *dS* di una superficie cilindrica *S* data in coordinate cilindriche dall’equazione

$$r = r(\vartheta) \qquad\qquad 0 \le \vartheta \le \vartheta_1$$

è $dS = ds dz$ dove *ds* è l’elemento di lunghezza d’arco della curva di equazioni parametriche

$$x = r(\vartheta)\cos\vartheta \qquad\qquad y = r(\vartheta)\sin\vartheta \qquad\qquad 0 \le \vartheta \le \vartheta_1$$

in altre parole è

e quindi $ds = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,d\theta$ dove $\dot{r} = r'(\vartheta)$

Se il cilindro ha la base sul piano $z = 0$ e il “coperchio” su una superficie liscia di equazione $z = f(x, y) > 0$ allora

$$0 \le z \le z(\vartheta) = f(r(\vartheta)\cos(\vartheta), r(\vartheta)\sin(\vartheta))$$

quindi

$$a(S) = \int_0^{\theta_1} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,d\vartheta \int_0^{z(\vartheta)} dz = \int_0^{\vartheta_1} z(\vartheta)\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,d\vartheta$$

Esempio 9

Determinare l'area di quella parte della superficie cilindrica di equazione $x^2 + y^2 = 2ay$

i) interna alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$
ii) esterna al cono di equazione $z^2 = x^2 + y^2$

Svolgimento

i) Ovviamente un quarto dell'area richiesta S si trova nel primo ottante. Pertanto osservato che l'equazione del cilindro in coordinate cilindriche è

$$\rho = 2a\sin\vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le \pi ,$$

e che il coperchio superiore giace sull'emisfero $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ si evince che

$$z = \sqrt{4a^2 - \rho^2} = 2a\,|\cos\vartheta| \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$

e quindi

$$a(S) = 4\int_0^{\pi/2} 2a\cos\vartheta\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\,d\vartheta = 16a^2\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta = 16a^2$$

ii) Come in i) osservato che il coperchio superiore giace sulla superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ segue che

$$z(\vartheta) = \rho = 2a\sin\vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$

da cui

$$a(S) = 4\int_0^{\pi/2} 2a\sin\vartheta \cdot 2a\; d\vartheta = 16a^2$$

Esempio 10

Determinare l'area di quella parte di superficie cilindrica $x^2 + z^2 = a^2$ interna alla superficie cilindrica $y^2 + z^2 = a^2$.

Svolgimento

L'equazione del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ in coordinate cilindriche è $\rho = a$. Pertanto è

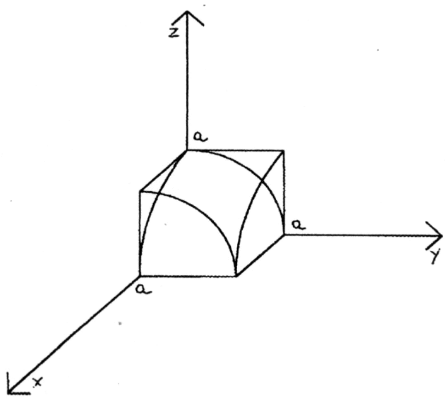
$$dS = a d\vartheta dy$$

Osservato che il coperchio destro giace sulla superficie di equazione:

$$y = \sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \vartheta} = a \,|\cos\vartheta| = y(\vartheta)$$

e che un ottavo dell'area richiesta si trova nel primo ottante, si evince che

$$a(S) = 8\int_0^{\pi/2} a \; d\vartheta \int_0^{a\cos\vartheta} dy = 8a^2 \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\vartheta = 8a^2 .$$



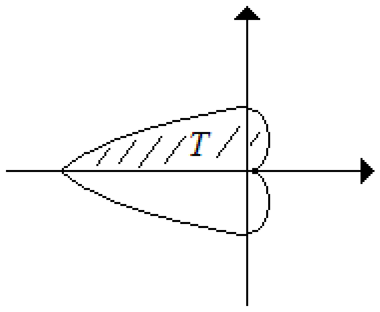
Esempio 11

Calcolare l'area del cilindro verticale di equazione $\rho = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ interna alla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 .$$

Svolgimento

L’area richiesta è quattro volte l’area della superficie cilindrica che sta nel primo e nel terzo ottante il cui coperchio è la superficie: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$



Pertanto

$$a(S)=4\int_0^{\pi} z(\theta)\sqrt{\rho^2+\dot{\rho}^2}\,d\theta$$

dove

$$\rho^2+\dot{\rho}^2=(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=2(1-\cos\theta)=4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$z(\theta)=\sqrt{4-\rho^2}=\sqrt{4-4\sin^4\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}\;.$$

Quindi

$$a(S)=16\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\frac{32}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

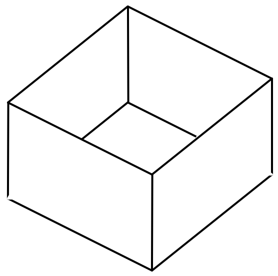
Osservazione

Se una rappresentazione parametrica $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ di una superficie è biunivoca anche sulla frontiera del suo dominio T, allora ***r*** trasforma la frontiera di T in una curva semplice chiusa liscia a tratti, detto **contorno della superficie parametrica**. Se ***r*** è biunivoca solo su una parte della frontiera di T, il contorno della superficie può essere ottenuto solo da una parte del contorno di T. Nel caso degli emisferi la circonferenza $x^2+y^2=a^2$, che corrisponde al lato $v=\pi/2$ del rettangolo è il contorno sia dell’emisfero superiore sia dell’emisfero inferiore. L’ intera superficie sferica è priva di contorno in quanto biunivoca solo sui punti interni al rettangolo. Una superficie di contorno è detta superficie chiusa. Come nel caso di una curva, la parametrizzazione di una superficie non è unica.

L'emisfero superiore può essere parametrizzata nel modo seguente:

$$x = u \quad , \quad y = v \quad , \quad z = \sqrt{a^2 - u^2 - v^2} \qquad\qquad (u,v) \in T$$

dove T è il disco $u^2 + v^2 \le a^2$.
Si osservi che per questa rappresentazione ogni punto sull'equatore è un punto singolare. Se un numero finito di superfici lisce sono unite, a coppie, lungo una parte o la totalità del loro contorno, la superficie così ottenuta è detta superficie <u>liscia a pezzi</u>.
Esempi di superficie lisce a pezzi sono i parallelepipedi. Un parallelepipedo è una superficie chiusa, in quanto non esistono due lati non uniti fra loro che costituiscono un contorno.



Se per esempio, eliminiamo la faccia superiore del parallelepipedo considerato, le rimanenti cinque facce formano la superficie di una scatola senza coperchio. I lati in alto delle quattro facce laterali costituiscono ora il contorno di questa superficie (liscia a pezzi).

Siano

$$\mathbf{r} : A \to \Re^3 \qquad (u,v) \to \mathbf{r}(u,v)$$
$$\mathbf{R} : B \to \Re^3 \qquad (s,t) \to \mathbf{R}(s,t)$$

due superfici regolari equivalenti e sia

$$\mathbf{G} : B \to A \quad \text{di classe } C^1(B) \text{ t.c. } (s,t) \to \big(U(s,t), V(s,t)\big)$$
$$\mathbf{R}(s,t) = \mathbf{r}[\mathbf{G}(s,t)] = \mathbf{r}\big(U(s,t), V(s,t)\big)$$

In altre parole
$\mathbf{R}(s,t)$ è l'equazione parametrica della superficie che si ottiene dall'equazione parametrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ mediante il combinamento di parametri

$$u = U(s,t) \qquad (s,t) \in B \text{ e } U \in C^1(B)$$
$$v = V(s,t) \qquad (s,t) \in B \text{ e } V \in C^1(B) \bullet$$

Allora

$$\mathbf{R}_s \wedge \mathbf{R}_t = (\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v) \frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{R}_s \wedge \mathbf{R}_t\| = \|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\| \left| \frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)} \right|$$

Inoltre
Se $\exists \int_{\mathbf{r}(A)} f\, dS \Rightarrow \exists \int_{\mathbf{r}(B)} F\, dS$ e $\int_{\mathbf{r}(A)} F\, dS = \int_{\mathbf{r}(B)} f\, dS$

dove $F[R(s,t)] = f[r(U(s,t), V(s,t))] \bullet$

INTEGRALI DI SUPERFICIE DI CAMPI VETTORIALI: FLUSSO

Superfici Orientate

Una superficie liscia S è orientabile se in ogni P$\in$ S esiste un campo vettoriale unitario $\hat{\mathbf{n}}$(P) continuo e normale a S. Una superficie S orientabile deve avere due lati. Il lato al di fuori del quale punta N è detto lato positivo.
Una superficie orientata S induce una orientazione su ogni curva C $\in$ ∂S. Il verso positivo di C è quello lungo il quale un osservatore, in piedi sul lato positivo della superficie, percorrendo C vede S alla sua sinistra.

Osservazione

Il concetto di orientabilità si può applicare solo alle superfici lisce. Tuttavia non sempre le superfici lisce sono orientabili. Inoltre spesso le superfici non sono lisce ma possono essere l'unione di più superfici lisce orientabili.

Flusso
In fisica, il significato originario di flusso è quello di quantità di un fluido che passa, nell'unità di tempo, attraverso una superficie. Tale definizione è legittimata dal fatto che se una superficie è attraversata da un fluido di densità unitaria, allora sapendo che la densità è la massa per unità di volume, segue che la massa del fluido che, nell'unità di tempo, passa attraverso la superficie è numericamente uguale al volume del fluido che passa attraverso la superficie nell'unità di tempo.
Supponiamo che σ sia una superficie orientata con un versore normale $\hat{\mathbf{n}}$ e che un fluido di densità unitaria fluisca attraverso σ nella direzione di $\hat{\mathbf{n}}$.
Inoltre supponiamo che il fluido sia stazionario, ovvero: in ogni istante la velocità della particella del fluido che occupa la posizione (x,y,z) rimane la stessa.
La velocità del fluido che supponiamo funzione della posizione e non del tempo sia descritta dal campo (di velocità):

$$\mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

Per determinare la massa Φ del fluido che passa attraverso una superficie orientata σ nella direzione dell'orientazione $\hat{\mathbf{n}}$ suddividiamo σ in *n* parti $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ con aree rispettivamente $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$.

Se le parti sono piccole e se (x_k^*, y_k^*, z_k^*) è un punto qualunque della k-esima parte σ_k ,è ragionevole affermare che la velocità è costante e uguale a $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ in ogni σ_k .
La componente della velocità del fluido attraverso la superficie σ_k ovvero:

$$\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \hat{\mathbf{n}}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \qquad (1)$$

rappresenta la distanza percorsa, nell'unità di tempo, dalla sezione del flusso inizialmente su σ_k**.** In altre parole la sezione del flusso che inizialmente si trova su σ_k, nell'unità di tempo si muoverà spaziando un cilindro di area base ΔS_k e di altezza (1).

Pertanto

$$\mathbf{F}\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\cdot \hat{\mathbf{n}}\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\Delta \mathrm{S}_k \qquad (2)$$

rappresenta il volume di questo cilindro.

Così il volume del fluido passante attraverso σ nell'unità di tempo può essere approssimata come segue:

$$\Phi \approx \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\cdot \hat{\mathbf{n}}\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\Delta \mathrm{S}_k$$

Se aumentiamo n in modo tale che le parti della superficie tendono a zero, è plausibile che gli errori nelle approssimazioni tendono a zero e il volume di Φ è:

$$\Phi = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\cdot \hat{\mathbf{n}}\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\Delta \mathrm{S}_k$$

che può essere espressa tramite l'integrale di superficie:

$$\Phi = \iint \mathbf{F}(x, y, z)\cdot \hat{\mathbf{n}}(x, y, z)\, d\mathrm{S} \qquad (3)$$

La quantità Φ definita da questo integrale rappresenta **il flusso di F attraverso σ,** ovvero la massa del flusso passante attraverso σ nell'unità di tempo.

Osservazione

Quando si deve calcolare il flusso di un campo vettoriale F attraverso una superficie liscia σ è opportuno tenere presente quanto segue:

i) Per una superficie σ definita dall'equazione $z = f(x, y)$ è

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}} \qquad \text{e} \quad dS = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\; dx\, dy$$

da cui

$$\hat{\mathbf{n}}\, dS = \pm\left(-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) dx\, dy\,. \qquad (4)$$

Analogamente, se la superficie è definita da una equazione della forma $y = g(x, z)$ oppure $x = h(y, z)$ risulta

$$\hat{\mathbf{n}}\, dS = \pm\left(-g_x\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - g_x\mathbf{k}\right) dx\, dy$$

oppure

$$\hat{\mathbf{n}}\, dS = \pm\left(\mathbf{i} - h_y\,\mathbf{j} - h_z\,\mathbf{k}\right) dz\, dy$$

ii) Per una superficie definita implicitamente da un'equazione della forma $\mathbf{F}\left(x, y, z\right) = 0$ e con una proiezione biunivoca su una regione T del piano xy, è

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{\nabla F}{\left\|\nabla F\right\|} \qquad \text{e} \qquad dS = \pm\frac{\left\|\nabla F\right\|}{\left|F\right|} dx\, dy$$

da cui

$$\hat{\mathbf{n}}\, dS = \pm\frac{\nabla F}{F_z} dx\, dy\,. \qquad (5)$$

Naturalmente valgono formule simili alle precedenti per le superfici che hanno una proiezione biunivoca T sui piani coordinati yz e xz; non è difficile verificare che allora risulta rispettivamente

$$\hat{\mathbf{n}}\, dS = \pm\frac{\nabla F}{F_x} dy\, dz \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbf{n}}\, dS = \pm\frac{\nabla F}{F_y} dx\, dz\ .$$

iii) Per una superficie σ definita parametricamente dall'equazione vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u, v\right)$ è

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\left\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right\|} \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbf{n}} = \pm\left\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right\| du\, dv$$

da cui

$$\hat{\mathbf{n}} dS = \pm\left(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right) du\, dv\,. \qquad (6)$$

Ovviamente, comunque venga assegnata la superficie, in (4), (5) e (6), il segno deve essere scelto in modo da assegnare a σ l'orientazione desiderato.

Esempio 1

Determinare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = m \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \qquad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

Uscente dalla superficie sferica σ con centro nell'origine e di raggio a.

Svolgimento

Dobbiamo calcolare

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è la normale unitaria esterna alla sfera σ ,ovvero

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}.$$

Se usiamo le coordinate sferiche in ogni punto della sfera è

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta,\Phi) = a \sin\Phi \cos\theta\, \mathbf{i} + a \sin\Phi \sin\theta\, \mathbf{j} + a \cos\Phi\, \mathbf{k}$$

dove $0 \leq \Phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$;

$$\mathbf{F} = \frac{m}{a^3}\, \mathbf{r}(\theta,\Phi) \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{a}\, \mathbf{r}(\theta,\Phi).$$

Infine osservato che

$$dS = \|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\Phi\|\, d\theta d\Phi = a^2 \sin\Phi\, d\theta d\Phi$$

si evince che

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = m \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\Phi\, d\Phi = 4\pi m.$$

Infatti è

$$\mathrm{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = m \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{m}{\|\mathbf{r}\|^2} = \frac{m}{a^2}.$$

Esempio 2

Calcolare il flusso totale di $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

Uscente dalla superficie cilindrica $x^2 + y^2 \le a^2$ $-h \le z \le h$.

Svolgimento

La superficie σ è costituita dai due dischi della base e del coperchio:

$$\sigma_1 : z = -h \quad x^2 + y^2 \le a^2, \qquad \sigma_2 : z = h \quad x^2 + y^2 \le a^2$$

e dalla superficie laterale

$$\sigma_L : x^2 + y^2 = a^2 \qquad -h \le z \le h.$$

Il flusso totale di **F** uscente dalla superficie σ è la somma del flusso di **F** uscente dalla base σ_1, dal coperchio σ_2 e dalla superficie laterale σ_L del cilindro.
È opportuno usare le coordinate cilindriche.

Sulla base è $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{k}$, pertanto

$$\iint_{\sigma_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{\sigma_1} -z \; dS$$

Poiché sulla base è z = -h abbiamo che

$$\iint_{\sigma_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = h\iint_{\sigma_1} dS = h\pi a^2.$$

Analogamente, essendo sul coperchio $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}$ e z = h, si ottiene

$$\iint_{\sigma_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{\sigma_2} z \; dS = h\iint_{\sigma_2} dS = h\pi a^2.$$

Sulla superficie laterale del cilindro σ_L la normale esterna non dipende da z, è

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}.$$

Inoltre su σ_L è

$$\mathbf{F} = a\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\theta\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

Pertanto su σ_L è $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}} = a$. Infine osservato che l'elemento d'area della superficie laterale del cilindro è

$$dS = dz\, ds = a\, d\theta\, dz$$

si evince che (*)

$$\iint_{\sigma_L} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h}^{h} dz = 4\pi a^2 h.$$

Quindi

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = 6\pi a^2 h.$$

(*) Osservazione

$$\iint_{\sigma_L} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS = \iint_{\sigma_L} a\ dS = a\,(\text{Area di } \sigma_L) = a\,(2\pi a 2h) = 4\pi a^2 h.$$

Esempio 3

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z) = xy^2\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + x^2 z\mathbf{k}$$

uscente dal cilindro ellittico S di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad 0 \le z \le 1$$

Svolgimento

Il flusso richiesto è la soma del flusso uscente dalla superficie laterale S_L del cilindro, dalla base B sul piano xy e dal coperchio sul piano $z=1$. Calcoliamo il flusso uscente da S_L**,** le cui equazioni parametriche sono

$$x = a\cos\theta,\ \ y = b\sin\theta,\ \ z = z$$

dove $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le z \le 1$**.** Essendo su S_L

$$\mathbf{F} = ab^2\sin^2\theta\cos\theta\,\mathbf{i} + b^3\sin^3\theta\,\mathbf{j} + za^2\cos^2\theta\,\mathbf{k}\,;$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z}{\|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z\|} = \frac{b\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\theta\,\mathbf{j}}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$$

oppure

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{T}\times\mathbf{k}}{\|\mathbf{T}\times\mathbf{k}\|} \quad \text{dove} \quad \mathbf{T} = -a\sin\theta\,\mathbf{i} + b\cos\,\mathbf{j}\,;$$

$$dS = ds\,dz = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos\theta}\, d\theta dz$$

si ha

$$\iint_{S_L} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, d\mathrm{S} = ab\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^1 dz = ab^3\pi \quad .$$

Il flusso del coperchio C è

$$\iint_{C} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\, d\mathrm{S} = \iint_{C} x^2 z\, dx\, dy = \iint_{T} x^2\, dx\, dy$$

dove si è tenuto conto che su C è $z = 1$ e che la proiezione di C sul piano xy è l'insieme

$$\mathbf{T} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}.$$

Ponendo $x = au,\quad y = bv$ e usando le coordinate polari si ottiene che

$$\iint_{T} x^2 z\, dx\, dy = a^3 b \iint_{D} u^2\, du\, dv = ba^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = ba^3\, \frac{\pi}{4}$$

dove D è il disco $u^2 + v^2 \le 1$.

Infine osservato che sulla base è $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{k}$ e $z = 0$ si evince che il flusso uscente da B è zero. Quindi il flusso totale uscente sa S è

$$\oiint_{S} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \pi ab\left(b^2 + \frac{a^2}{4} \right).$$

Esempio 4

Calcolare il flusso del campo vettoriale di $\mathbf{F} = y\ \mathbf{i} + z\ \mathbf{k}$ uscente dalla frontiera σ del cono $0 \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}$

Svolgimento

Indichiamo con σ_L la superficie laterale del cono $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ e con T il disco $x^2 + y^2 \le 1$. Allora

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS = \iint_{\sigma_L} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS + \iint_{T} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS$$

dove

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{su } \sigma_L \qquad \hat{\mathbf{n}} = -\ \mathbf{k} \quad \text{su } T.$$

Essendo su σ_L

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathbf{k}$$

abbiamo (tenuto presente che σ_L si proietta su T)

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS = \iint_{T} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy - \iint_{T} z\ dx\,dy\,.$$

Osservato che, per motivi di simmetria, è

$$\iint_{T} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\,dy = 0$$

e che su T è $z = 0$, utilizzando le coordinate polari, si ottiene

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dS = \iint_{T} \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-\rho)\rho\ d\rho = \frac{\pi}{3}.$$