



CAPITOLO 7

Calcolo differenziale vettoriale

I matematici sono come i francesi: tutte le volte che dite loro qualcosa, la traducono nella loro lingua e immediatamente è qualcosa di completamente diverso.

Johann Wolfgang von Goethe 1749–1832
da *Massime e riflessioni*, 1829

Introduzione In questo capitolo sono formulate alcune versioni del teorema fondamentale del calcolo differenziale valide in due e in tre dimensioni. I teoremi corrispondenti, noti come teorema di Green, teorema della divergenza o di Gauss e teorema di Stokes, sono molto importanti, sia dal punto di vista teorico sia per le applicazioni. Essi sono formulati utilizzando alcuni operatori differenziali, la divergenza e il rotore, che risultano collegati all'operatore gradiente incontrato nel paragrafo 3.7. Tali operatori sono introdotti nei paragrafi 7.1 e 7.2, dove sono descritte anche le loro proprietà fondamentali. Il resto del capitolo introduce le generalizzazioni del teorema fondamentale del calcolo differenziale e descrive alcune loro applicazioni.

7.1 Gradiente, divergenza e rotore

L'informazione relativa alla rapidità di variazione (del primo ordine) di un campo scalare in tre dimensioni $f(x, y, z)$ è contenuta nelle tre derivate parziali prime $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ e $\partial f/\partial z$. Il gradiente,

$$\mathbf{grad} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k},$$

raccoglie questa informazione in un'unica "derivata a valori vettoriali" di f . Desideriamo sviluppare qualcosa di analogo che contenga l'informazione riguardo la rapidità di variazione dei campi vettoriali.

L'informazione relativa alla rapidità di variazione (del primo ordine) di un campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \mathbf{i} + F_2(x, y, z) \mathbf{j} + F_3(x, y, z) \mathbf{k}$$

è contenuta nelle nove derivate parziali prime, tre per ciascuna delle tre componenti del campo vettoriale \mathbf{F} :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{array}$$

(Ricordiamo che F_1 , F_2 e F_3 indicano le componenti cartesiane di \mathbf{F} , non le derivate parziali.) Due combinazioni opportune di queste derivate esprimono l'informazione in un modo particolarmente utile, analogamente a quanto accade per il gradiente nel caso dei campi scalari. Queste combinazioni sono la **divergenza** di \mathbf{F} ($\text{div } \mathbf{F}$) e il **rotore** di \mathbf{F} ($\text{rot } \mathbf{F}$, indicato anche con **curl** \mathbf{F} nei testi in lingua inglese) che sono definiti nel modo seguente:

Divergenza e rotore

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Si noti che la divergenza di un campo vettoriale è un campo scalare, mentre il rotore di un campo vettoriale è ancora un campo vettoriale. Si osservino inoltre le notazioni

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{F}$$

che saranno usate frequentemente al posto di $\text{div } \mathbf{F}$ e di $\text{rot } \mathbf{F}$. Tali notazioni si basano sull'uso dell'*operatore differenziale vettoriale*

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

chiamato operatore "del" o "nabla". Nello stesso modo in cui il gradiente di un campo scalare f può essere considerato la *moltiplicazione formale scalare* dell'operatore ∇ per la funzione f , anche la divergenza e il rotore di \mathbf{F} possono essere considerati come i *prodotti formali*, rispettivamente *scalare* e *vettoriale*, di ∇ per il vettore \mathbf{F} . Quando si usa ∇ l'ordine dei "fattori" è importante: la quantità su cui agisce ∇ deve comparire alla destra di ∇ . Ad esempio, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ e $\mathbf{F} \cdot \nabla$ non significano la stessa cosa: il primo è un campo scalare, mentre il secondo è un operatore differenziale scalare

$$\mathbf{F} \cdot \nabla = F_1 \frac{\partial}{\partial x} + F_2 \frac{\partial}{\partial y} + F_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Esempio 1 Determinare la divergenza e il rotore del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = xy \mathbf{i} + (y^2 - z^2) \mathbf{j} + yz \mathbf{k}.$$

ATTENZIONE

Non confondere il campo scalare $\nabla \cdot \mathbf{F}$ con l'operatore differenziale scalare $\mathbf{F} \cdot \nabla$, poiché sono oggetti completamente diversi.

Soluzione Abbiamo

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = y + 2y + y = 4y,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 - z^2 & yz \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - z^2) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(yz) \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right] \mathbf{k} = 3z\mathbf{i} - x\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Si definiscono anche la divergenza e il rotore di un campo vettoriale bidimensionale: se $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$, allora

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Si noti che il rotore di un campo vettoriale bidimensionale è ancora un vettore dello spazio tridimensionale ed è perpendicolare al piano del campo. Mentre la divergenza e il gradiente sono definiti in un numero qualsiasi di dimensioni, il rotore è definito solo in tre dimensioni e nel piano (a condizione di ammettere che i valori del rotore appartengano allo spazio tridimensionale).

Esempio 2 Determinare divergenza e rotore di $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} - ye^x\mathbf{j}$.

Soluzione Abbiamo

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial y}(-ye^x) = e^y - e^x,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(-ye^x) - \frac{\partial}{\partial y}(xe^y) \right) \mathbf{k} \\ &= -(ye^x + xe^y) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Interpretazione della divergenza

Il valore della divergenza di un campo vettoriale \mathbf{F} in un punto P è, in un certo senso, una misura di quanto il campo "diverge" o "si apre" nel punto P . Il valore di tale allargamento del campo può essere misurato dal flusso uscente da una piccola superficie che racchiude P . Ad esempio, $\nabla \cdot \mathbf{F}(P)$ è il limite del *flusso per unità di volume* uscente attraverso superfici sferiche sempre più piccole con centro in P .

TEOREMA 1

La divergenza come densità di flusso

Se $\hat{\mathbf{N}}$ è la normale unitaria uscente dalla superficie \mathcal{S}_ϵ di una sfera di raggio ϵ con centro nel punto P e se \mathbf{F} è un campo vettoriale tridimensionale liscio, allora

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

DIMOSTRAZIONE Senza perdita di generalità supponiamo che P sia nell'origine. Vogliamo sviluppare $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ in serie di Taylor attorno all'origine (serie di Maclaurin). Come mostrato nel paragrafo 3.9 nel caso di una funzione di due variabili, la serie di Maclaurin di una funzione scalare di tre variabili assume la forma

$$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0,0)} x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,0,0)} y + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(0,0,0)} z + \dots,$$

dove "... " rappresentano i termini del secondo ordine e di ordine superiore in x , y e z . Se questa formula è applicata alle componenti di \mathbf{F} , si ottiene

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}_0 + F_{/x,0} x + F_{/y,0} y + F_{/z,0} z + \dots$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathbf{F}(0, 0, 0) \\ F_{/x,0} &= \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right|_{(0,0,0)} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \mathbf{k} \right) \Big|_{(0,0,0)} \\ F_{/y,0} &= \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right|_{(0,0,0)} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \mathbf{k} \right) \Big|_{(0,0,0)} \\ F_{/z,0} &= \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right|_{(0,0,0)} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \mathbf{k} \right) \Big|_{(0,0,0)} \end{aligned}$$

e dove "... " rappresentano ancora i termini di grado uguale o superiore al secondo in x , y e z . La normale unitaria su δ_ϵ è $\hat{\mathbf{N}} = (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})/\epsilon$, per cui abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} &= \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{i} x + \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{j} y + \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{k} z \\ &\quad + F_{/x,0} \cdot \mathbf{i} x^2 + F_{/x,0} \cdot \mathbf{j} xy + F_{/x,0} \cdot \mathbf{k} xz \\ &\quad + F_{/y,0} \cdot \mathbf{i} xy + F_{/y,0} \cdot \mathbf{j} y^2 + F_{/y,0} \cdot \mathbf{k} yz \\ &\quad + F_{/z,0} \cdot \mathbf{i} xz + F_{/z,0} \cdot \mathbf{j} yz + F_{/z,0} \cdot \mathbf{k} z^2 + \dots). \end{aligned}$$

Integriamo su δ_ϵ ogni termine dentro le parentesi. Per simmetria si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\delta_\epsilon} x \, dS &= \iint_{\delta_\epsilon} y \, dS = \iint_{\delta_\epsilon} z \, dS = 0, \\ \iint_{\delta_\epsilon} xy \, dS &= \iint_{\delta_\epsilon} xz \, dS = \iint_{\delta_\epsilon} yz \, dS = 0. \end{aligned}$$

Inoltre, ancora per simmetria, si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\delta_\epsilon} x^2 \, dS &= \iint_{\delta_\epsilon} y^2 \, dS = \iint_{\delta_\epsilon} z^2 \, dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\delta_\epsilon} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS = \frac{1}{3} (\epsilon^2) (4\pi \epsilon^2) = \frac{4}{3} \pi \epsilon^4, \end{aligned}$$

mentre i termini di ordine superiore hanno integrali di superficie contenenti la potenza ϵ^5 e potenze di ordine superiore. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi \epsilon^3} \iint_{\delta_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS &= F_{/x,0} \cdot \mathbf{i} + F_{/y,0} \cdot \mathbf{j} + F_{/z,0} \cdot \mathbf{k} + \epsilon (\dots) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{F}(0, 0, 0) + \epsilon (\dots) \\ &\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F}(0, 0, 0) \end{aligned}$$

quando $\epsilon \rightarrow 0^+$. Ciò è quanto si voleva dimostrare.

Osservazione Le superfici sferiche δ_ϵ del teorema precedente possono essere sostituite da altre famiglie di superfici lisce a pezzi che si contraggono in un punto. Ad esempio, se B è la superficie di una scatola rettangolare di dimensioni Δx , Δy e Δz contenente P , allora

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(P) = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \oiint_B \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Si veda l'esercizio 12 più avanti.

Osservazione In due dimensioni, $\nabla \cdot \mathbf{F}(P)$ rappresenta il valore limite del *flusso per unità di area* uscente da una piccola curva chiusa che non interseca se stessa e che racchiude P . Si veda l'esercizio 13 alla fine di questo paragrafo.

Riprendiamo l'interpretazione di un campo vettoriale come campo di velocità di un fluido incomprimibile in moto (stazionario). Se il flusso totale del campo di velocità uscente dalla superficie di contorno di un dominio è positivo (o negativo), allora il fluido deve essere creato (o distrutto) dentro il dominio.

Il campo vettoriale $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dell'esempio 2 del paragrafo 6.6 ha divergenza costante, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$. In quell'esempio abbiamo mostrato che il flusso di \mathbf{F} uscente da un cilindro con una base di raggio a e con altezza $2h$ era $6\pi a^2 h$, valore che è tre volte il volume del cilindro. Gli esercizi 2 e 3 del paragrafo 6.6 confermano risultati simili per il flusso di \mathbf{F} uscente da domini aventi forma diversa. Ciò conduce a un'altra interpretazione della divergenza: $\nabla \cdot \mathbf{F}(P)$ è l'*intensità della sorgente, per unità di volume*, di \mathbf{F} in P . Secondo questa interpretazione, ci si dovrebbe attendere, anche per un campo vettoriale \mathbf{F} con divergenza non costante, che il flusso totale di \mathbf{F} , uscente dalla superficie δ di un dominio D , sia uguale all'intensità totale di tutte le sorgenti di \mathbf{F} in D , cioè

$$\oiint_{\delta} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Questo è il **teorema della divergenza**, che sarà dimostrato nel paragrafo 7.4.

Esempio 3 Verificare che il campo vettoriale $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, causato da una sorgente d'intensità m posta in $(0, 0, 0)$, ha divergenza nulla in tutti i punti di \mathbb{R}^3 tranne nell'origine. Quanto dovrebbe valere il flusso totale di \mathbf{F} uscente dalla superficie di contorno di un dominio D se l'origine si trova all'esterno di D ? E se l'origine è all'interno del dominio D ?

Soluzione Poiché

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{m}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}), \quad \text{dove } r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

e, poiché $\partial r / \partial x = x/r$, abbiamo

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = m \frac{r^3 - 3xr^2 \left(\frac{x}{r} \right)}{r^6} = m \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

In modo analogo

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = m \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_3}{\partial z} = m \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Sommando questi tre risultati otteniamo $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ se $r > 0$.

Se l'origine si trova all'esterno del dominio D , allora la densità di sorgente di \mathbf{F} in D è nulla, per cui il flusso totale di \mathbf{F} uscente da D è zero. Se l'origine si trova dentro D , allora D contiene una sorgente d'intensità m (che produce $4\pi m$ unità di volume di fluido per unità di tempo) e il flusso uscente da D è $4\pi m$. Vedere l'esempio 1 e gli esercizi 9 e 10 del paragrafo 6.6, che si riferiscono a casi specifici. ■

Distribuzioni e funzioni delta

Se $\ell(x)$ rappresenta la densità lineare (massa per unità di lunghezza) di una massa distribuita lungo l'asse x , allora la massa totale di tale distribuzione è

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) dx.$$

Supponiamo ora che la sola massa sull'asse sia una "massa puntiforme" unitaria, $m = 1$, posta nell'origine. Allora in tutti gli altri punti con $x \neq 0$ la densità è $\ell(x) = 0$, ma dobbiamo lo stesso avere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) dx = m = 1,$$

per cui $\ell(0)$ deve essere infinito. Questa è una situazione ideale, ossia un modello matematico. Nessuna funzione reale $\ell(x)$ può avere tali proprietà: se una funzione è nulla ovunque tranne in un solo punto, allora qualunque integrale di questa funzione sarà nullo. (Perché?) (Del resto, nessuna massa reale può occupare un solo punto.) Cionondimeno, è utile modellare le masse reali isolate come masse puntiformi e modellare conseguentemente la loro densità per mezzo di **funzioni generalizzate**, chiamate anche **distribuzioni**.

Possiamo pensare alla densità di una massa puntuale di valore unitario posta in $x = 0$ come il limite di densità crescenti concentrate in intervalli sempre più piccoli. Ad esempio, se

$$d_n(x) = \begin{cases} n/2 & \text{se } |x| \leq 1/n \\ 0 & \text{se } |x| > 1/n \end{cases}$$

(vedi figura 7.1), allora per ogni funzione liscia $f(x)$ definita in \mathbb{R} abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_n(x) f(x) dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} f(x) dx.$$

Sostituendo $f(x)$ nell'integrale a destra con la sua serie di Maclaurin, si ha

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Dal momento che

$$\int_{-1/n}^{1/n} x^k dx = \begin{cases} 2/((k+1)n^{k+1}) & \text{se } k \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è dispari,} \end{cases}$$

si può prendere il limite per $n \rightarrow \infty$ e si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d_n(x) f(x) dx = f(0).$$

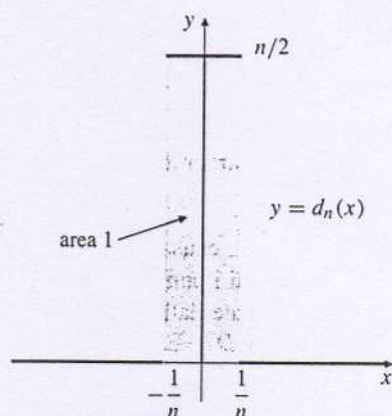


Figura 7.1 Le funzioni $d_n(x)$ convergono a $\delta(x)$ quando $n \rightarrow \infty$

DEFINIZIONE 1

La **distribuzione di Dirac** $\delta(x)$ (chiamata anche **funzione delta di Dirac**, seppure impropriamente poiché essa non è in realtà una funzione) è il limite della successione $d_n(x)$ per $n \rightarrow \infty$. Essa è definita dalla condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

per qualunque funzione liscia $f(x)$.

Un cambiamento formale di variabile mostra che la funzione delta soddisfa anche

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t) f(t) dt = f(x).$$

Esempio 4 In ragione del fatto che $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ soddisfa $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ per $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ma produce un flusso di $4\pi m$ uscente da ogni sfera con centro nell'origine, possiamo considerare $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)$ come una distribuzione

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 4\pi m \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

In particolare, integrando questa distribuzione per la funzione $f(x, y, z) = 1$ su \mathbb{R}^3 , abbiamo

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) dV &= 4\pi m \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz \\ &= 4\pi m. \end{aligned}$$

L'integrale può essere calcolato ugualmente su *qualsunque dominio* di \mathbb{R}^3 che contenga l'origine nel suo interno, e il risultato sarà lo stesso. Invece, se l'origine si trova all'esterno del dominio, l'integrale sarà nullo. Riesamineremo questo risultato dopo avere enunciato il teorema della divergenza nel paragrafo 7.4.

Uno studio formale delle distribuzioni va oltre gli scopi di questo libro ed è usualmente affrontato in testi avanzati sulle equazioni differenziali e sui metodi matematici per l'ingegneria.

Interpretazione del rotore

Il rotore $\nabla \times \mathbf{F}(P)$ misura, in un certo senso, quanto il campo vettoriale \mathbf{F} "giri" attorno al punto P .

Esempio 5 Consideriamo il campo di velocità

$$\mathbf{v} = -\Omega y \mathbf{i} + \Omega x \mathbf{j},$$

di un solido che ruota con velocità angolare Ω attorno all'asse z , cioè con vettore velocità angolare $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$. (Vedi la figura 6.2 del paragrafo 6.1.) Calcolare la circolazione di questo campo lungo il cerchio C_ϵ nel piano xy con centro in un punto (x_0, y_0) arbitrario, avente raggio ϵ , e orientato in senso antiorario. Qual è la relazione fra questa circolazione e il rotore di \mathbf{v} ?

Soluzione Una parametrizzazione del cerchio indicato è

$$\mathbf{r} = (x_0 + \epsilon \cos t) \mathbf{i} + (y_0 + \epsilon \sin t) \mathbf{j}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

per cui la circolazione di \mathbf{v} lungo C_ϵ è data da

$$\begin{aligned} \oint_{C_\epsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (-\Omega(y_0 + \epsilon \sin t)(-\epsilon \sin t) + \Omega(x_0 + \epsilon \cos t)(\epsilon \cos t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\Omega\epsilon(y_0 \sin t + x_0 \cos t) + \Omega\epsilon^2) dt = 2\Omega\pi\epsilon^2. \end{aligned}$$

Dal momento che

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\Omega x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\Omega y) \right) \mathbf{k} = 2\Omega \mathbf{k} = 2\boldsymbol{\Omega},$$

la circolazione è il prodotto di $(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k}$ e dell'area delimitata da C_ϵ . Questa circolazione dipende dal raggio del cerchio ma non dalla posizione del suo centro.

I calcoli dell'esempio precedente sembrano indicare che il rotore di un campo vettoriale è una misura della *circolazione per unità di area* in piani normali al rotore. Una versione più precisa di questa affermazione è enunciata più avanti, nel teorema 2. Non dimostreremo adesso questo teorema, poiché una dimostrazione sarebbe ora molto complicata. (Tuttavia si veda l'esercizio 14 alla fine di questo paragrafo per un caso particolare.) Una dimostrazione semplice si basa sul teorema di Stokes (vedi esercizio 13 nel paragrafo 7.5).

TEOREMA 2

Il rotore come densità di circolazione

Se F è un campo vettoriale liscio e C_ϵ è una circonferenza di raggio ϵ , con centro nel punto P , che costituisce il contorno di un disco S_ϵ con normale unitaria \hat{N} (e con orientazione ereditata da C_ϵ , vedi figura 7.2), allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \oint_{C_\epsilon} F \cdot dr = \hat{N} \cdot \nabla \times F(P).$$

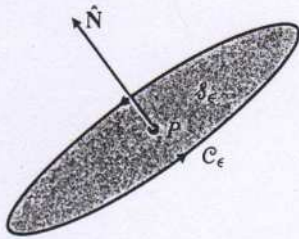


Figura 7.2

L'esempio 5 suggerisce inoltre la seguente definizione di velocità angolare *locale* di un fluido in moto.

La **velocità angolare locale** in un punto P di un fluido in moto con un campo di velocità $v(P)$ è data da

$$\Omega(P) = \frac{1}{2} \nabla \times v(P).$$

Il teorema 2 afferma che la velocità angolare locale $\Omega(P)$ è quel vettore la cui componente, nella direzione di un vettore unitario \hat{N} qualsiasi, è la metà del limite della circolazione per unità di area attorno alle circonferenze che sono il contorno di piccoli dischi con centro in P e aventi \hat{N} per normale.

Non tutti i campi vettoriali con rotore diverso da zero *sembrano* circolare. Il campo di velocità della rotazione di un corpo rigido considerato nell'esempio 5 sembra circolare attorno all'asse di rotazione, ma la circolazione lungo un cerchio qualunque appartenente a un piano perpendicolare a quell'asse è risultata essere indipendente dalla posizione del centro del cerchio: dipendeva solo dalla sua area. Inoltre, non è necessario che il cerchio giri intorno all'asse di rotazione. L'esempio seguente studia il campo di velocità di un fluido le cui linee di corrente sono *linee rette*, pur avendo un rotore costante non nullo, e quindi una velocità angolare locale costante diversa da zero.

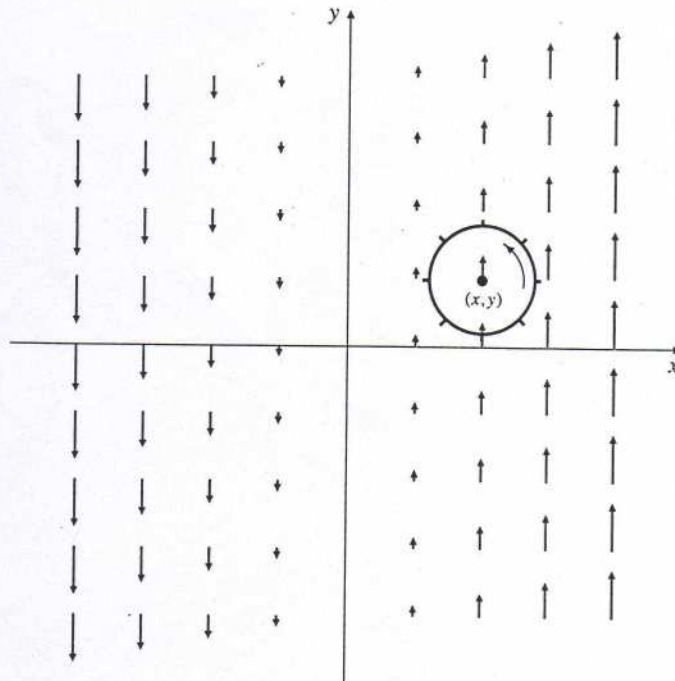


Figura 7.3 Il flusso non solo trascina la rotellina ma la fa anche ruotare attorno al suo centro

Esempio 6

Consideriamo il campo di velocità $v = x j$ di un fluido che si muove nel piano xy . È evidente che le particelle del fluido si muovono lungo rette parallele

all'asse y . Tuttavia risulta $\nabla \times \mathbf{v}(x, y) = \mathbf{k}$ e $\Omega(x, y) = \frac{1}{2}\mathbf{k}$. Una rotellina di raggio ϵ munita di palette, posta con il suo centro nella posizione (x, y) nel fluido (vedi figura 7.3), sarà trasportata dal fluido alla velocità $x\mathbf{j}$, ma sarà anche messa in rotazione con velocità angolare $\Omega(x, y)$, che è indipendente dalla posizione. Questa velocità angolare è causata dal fatto che il modulo della velocità del fluido alla destra della rotellina è maggiore del modulo della velocità alla sua sinistra.

Esercizi 7.1

Negli esercizi 1–11 calcolare $\nabla \cdot \mathbf{F}$ e $\nabla \times \mathbf{F}$ per i campi vettoriali indicati.

1. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

4. $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x\mathbf{k}$

6. $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$

7. $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$

8. $\mathbf{F} = f(z)\mathbf{i} - f(z)\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F}(r, \theta) = \frac{r}{r_0}\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$, dove $[r, \theta]$ sono le coordinate polari

10. $\mathbf{F} = \hat{r} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$

11. $\mathbf{F} = \hat{\theta} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$.

- *12. Sia \mathbf{F} un campo vettoriale tridimensionale liscio. Se $B_{a,b,c}$ è la superficie della scatola $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$, con normale esterna $\hat{\mathbf{N}}$, mostrare che

$$\lim_{a,b,c \rightarrow 0^+} \frac{1}{8abc} \oiint_{B_{a,b,c}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \nabla \cdot \mathbf{F}(0, 0, 0).$$

- *13. Sia \mathbf{F} un campo vettoriale bidimensionale liscio. Se C_ϵ è la circonferenza di raggio ϵ con centro nell'origine e $\hat{\mathbf{N}}$ è la normale unitaria esterna a C_ϵ , mostrare che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \nabla \cdot \mathbf{F}(0, 0).$$

- *14. Dimostrare il teorema 2 nel caso particolare in cui C_ϵ è la circonferenza nel piano xy con parametrizzazione

$$x = \epsilon \cos \theta, \quad y = \epsilon \sin \theta, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

In questo caso $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$. *Suggerimento:* sviluppare $\mathbf{F}(x, y, z)$ in serie di Taylor vettoriale attorno all'origine, come nella dimostrazione del teorema 1, e calcolare la circolazione dei singoli termini attorno a C_ϵ .

7.2 Identità contenenti gradiente, rotore e divergenza

Esistono numerose identità che coinvolgono le funzioni

$$\text{grad } f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix},$$

e l'operatore di Laplace o laplaciano, $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, definito, per un campo scalare ϕ , dalla relazione

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \text{div grad } \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

e, per un campo vettoriale $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$, dalla relazione

$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_1) \mathbf{i} + (\nabla^2 F_2) \mathbf{j} + (\nabla^2 F_3) \mathbf{k}.$$

(In alcuni libri l'operatore di Laplace $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$ è indicato con Δ .) Ricordiamo anche che una funzione ϕ è detta **armonica** in un dominio D , se $\nabla^2 \phi = 0$ in tutto D . (Vedere il paragrafo 3.4.)

Le identità più importanti sono raccolte tutte assieme nel teorema che segue. La maggior parte di tali identità sono delle forme della regola per la derivazione del prodotto di funzioni. Dimosteremo alcune di queste per illustrare le tecniche necessarie (il più delle volte consistenti nel calcolo diretto) e lasciamo la dimostrazione delle rimanenti come esercizio. Si noti che due relazioni coinvolgono quantità del tipo $(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$, che rappresenta il vettore ottenuto dall'applicazione dell'operatore differenziale scalare $\mathbf{G} \cdot \nabla$ a un campo vettoriale \mathbf{F} :

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} = G_1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + G_2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + G_3 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}.$$

TEOREMA 3

Identità differenziali vettoriali

Siano ϕ e ψ campi scalari, e \mathbf{F} e \mathbf{G} campi vettoriali, che sono supposti essere sufficientemente lisci in modo che tutte le loro derivate parziali presenti nelle identità siano continue. Valgono allora le seguenti identità:

- (a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$
- (b) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})$
- (c) $\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F})$
- (d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$
- (e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$
- (f) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$
- (g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ (div rot = 0)
- (h) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ (rot grad = 0)
- (i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$
(rot rot = grad div - laplaciano)

Le identità (a)–(f) rappresentano delle versioni vettoriali della regola per la derivazione del prodotto di funzioni e sono relative alle derivate del primo ordine; inoltre coinvolgono l'applicazione di un solo operatore ∇ in ogni termine. Le identità (g)–(i) sono identità del secondo ordine. Le identità (g) e (h) esprimono l'uguaglianza di derivate seconde miste e sono particolarmente importanti per capire la divergenza e il rotore.

DIMOSTRAZIONE Dimosteremo solo le identità (c), (e) e (g). Le altre dimostrazioni sono simili.

(c) La prima componente (la componente *i*) di $\nabla \times (\phi\mathbf{F})$ è

$$\frac{\partial}{\partial y}(\phi F_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi F_2) = \frac{\partial \phi}{\partial y} F_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z} F_2 + \phi \frac{\partial F_3}{\partial y} - \phi \frac{\partial F_2}{\partial z}.$$

I primi due termini del membro di destra costituiscono la prima componente di $(\nabla\phi) \times \mathbf{F}$, mentre gli ultimi due termini costituiscono la prima componente di $\phi \nabla \times \mathbf{F}$. Pertanto le prime componenti di entrambi i membri dell'identità (c) sono uguali. L'uguaglianza delle altre componenti si ottiene in modo simile.

(e) Anche in questo caso è sufficiente mostrare che le prime componenti dei vettori di entrambi i membri dell'identità sono uguali. Per calcolare la prima componente di $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$ abbiamo bisogno della seconda e della terza componente di $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$, che sono

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})_2 = F_3 G_1 - F_1 G_3 \quad \text{e} \quad (\mathbf{F} \times \mathbf{G})_3 = F_1 G_2 - F_2 G_1.$$