Funzione Potenziale e Campi Conservativi

Sia

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}(x,y,z)=F_1(x,y,z)\hat{\mathbf{i}}+F_2(x,y,z)\hat{\mathbf{j}}+F_3(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}$$

un campo vettoriale di classe $C^{(1)}(\Omega)$ dove Ω denota un aperto connesso (dominio).

Definizione. Se per qualche funzione $\Phi=\Phi(x,y,z)$ definita in Ω, risulta $\mathbf{F}=\nabla\Phi$ allora si dice che **F** è un campo vettoriale conservativo in Ω e la funzione Φ è detta potenziale scalare di **F**.

Si osservi che $\mathbf{F}$ è conservativo in un dominio Ω se e solo

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\nabla\Phi(x,y,z) \qquad \forall (x,y,z)\in\Omega$$

il potenziale Φ non può avere neanche un punto singolare in Ω.

Sia c una costante arbitraria, osservato che

i) $\nabla[\Phi+c]=\nabla\Phi$

ii) $\nabla[\Phi(x,y,z)-\Psi(x,y,z)]=0$ per ogni $(x,y,z)\in\Omega$ (aperto connesso) implica $\Phi(x,y,z)-\Psi(x,y,z)=c \quad su \ \ \Omega$;

si evince quanto segue:

due funzioni potenziali di un campo vettoriale conservativo definito su un aperto connesso differiscono per una costante.

In altre parole le funzioni potenziali non sono determinate in modo univoco: si può sempre aggiungere una costante.

Una condizione necessaria che deve essere soddisfatta affinché un campo vettoriale in $\Re^3$ (oppure in $\Re^2$) sia conservativo è che sia irrotazionale. In altre parole:

$$\text{se}\,\mathbf{F}=\nabla\Phi \quad allora \quad \nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{rot}\ \mathbf{F}=0$$

Per dimostrarlo si osservi che l'equazione $\mathbf{F}=\nabla\Phi$ ovvero

$$F_1(x,y,z)\hat{\mathbf{i}}+F_2(x,y,z)\hat{\mathbf{j}}+F_1(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

implica le tre equazioni scalari

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = F_1 \quad ; \frac{\partial\Phi}{\partial y} = F_2 \ ; \ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = F_3$$

da cui, dovendo essere uguali le derivate parziali miste di Φ in quanto **F** è di classe $C^{(1)}$, si ottiene

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} = 0$$

In seguito dimostreremo che la condizione precedente è anche sufficiente nel caso in cui **F** è definito in un aperto semplicemente connesso.

Particolari domini semplicemente connessi sono i domini stellati rispetto ad un punto:
un dominio si dice stellato rispetto ad un suo punto P_0 se per ogni punto P del dominio, il segmento di estremi P e P_0 sta tutto nel dominio.
In questo sussiste il teorema successivo.
Per non confondere le coordinate (x,y,z) del punto P con gli assi coordinati indichiamo questi con (u,v,w). Premesso ciò ricordiamo che l'equazione vettoriale di estremi P_0 (x_0,y_0,z_0) e P (x,y,z) è

$$\mathbf{r}(t) = P_0 + t(P - P_0) = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}$$

dove

$$u = x_0 + t(x - x_0), v = y_0 + t(y - y_0), w + (z - z_0)$$

In particolare se P_0 coincide con l'origine risulta

$$\mathbf{r}(t) = t(P - 0) = tx\,\hat{\mathbf{i}} + ty\,\hat{\mathbf{j}} + tz\,\hat{\mathbf{k}} \qquad t \in [0,1] \qquad (1)$$

da cui le equazioni parametriche del segmento i cui estremi sono l'origine e P(x,y,z) sono

$$u = tx, \qquad v = ty, \qquad w = tz \qquad t \in [0,1] \qquad (2)$$

Teorema. Se F è un campo conservativo irrotazionale liscio in un dominio Ω stellato rispetto ad un punto $P_0 \in \Omega$ allora $F = \nabla\Phi$ per qualche funzione potenziale Φ definita in Ω, ovvero F è conservativo.

Dimostrazione.

Senza perdere di generalità possiamo supporre che P_0 sia l'origine.

Consideriamo la funzione $\Phi = (x, y, z)$ definita dall'uguaglianza seguente

$$\Phi = (x, y, z) = \int_C F \cdot (\frac{dr}{dt}) \qquad (x, y, z) \in \Omega$$

dove C è il segmento di estremi l'origine e P, le cui equazioni parametriche sono date dalla (2).

Pertanto

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^1 [xF_1(u,v,w) + yF_2(u,v,w) + zF_3(u,v,w)]dt \tag{3}$$

Dimostriamo che

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = F_1(x, y, z), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = F_2(x, y, z), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = F_3(x, y, z), \tag{4}$$

A tale scopo deriviamo la (3) rispetto ad *x* ottenendo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \int_0^1 (F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial u} + x + \frac{\partial F_2}{\partial u} + y + \frac{\partial F_3}{\partial u} + z)dt = \\ &= \int_0^1 [F_1 + t(\frac{\partial F_1}{\partial u} x + \frac{\partial F_2}{\partial u} y + \frac{\partial F_3}{\partial u} z)]dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[tF_1(u,v,z)]dt = tF_1(tx,ty,tz)\Big|_0^1 = F_1(x, y, z)\end{aligned}$$

Analogamente si ha

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = F_2(x, y, z) \qquad e \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = F_3(x, y, z)$$

il che completa la dimostrazione.

Esempi:

1. Il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}\,\hat{\mathbf{i}}+\frac{2y}{x^2+y^2}\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

(definito in un aperto connesso) è irrotazionale in quanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{2x}{x^2+y^2}$$

pertanto potrebbe essere conservativo.

Per stabilire se il campo vettoriale dato è conservativo poniamo

$$i)\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}; \quad ii)\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Integrando la i) rispetto a x otteniamo

$$\Phi(x,y)=\ln(x^2+y^2)+c(y).$$

Si osservi che la costante di integrazione è una costante rispetto a x ovvero è una funzione della sola variabile y, che abbiamo indicato con c(y). Se deriviamo ambo i membri dell'equazione precedente rispetto a y otteniamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}+c'(y)$$

Confrontando l'equazione precedente con la ii) troviamo che $c'(y)=0$ da cui $c(y)=k$ (costante).
Quindi, a meno di una costante additiva, la funzione

$$\Phi(x,y)=\ln(x^2+y^2)$$

è una funzione potenziale del campo vettoriale **F**.

2. Il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{j}} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

il cui dominio è un aperto connesso, è irrotazionale in quanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} \qquad .$$

Se esiste una funzione potenziale Φ che genera il campo, deve necessariamente essere

$$i)\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}; \quad ii)\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad .$$

Integrando i) rispetto a x otteniamo

$$\Phi(x,y) = -\mathbf{arctan}\left(\frac{x}{y}\right) + c(y) \qquad y \neq 0$$

da cui, derivando ambo i membri rispetto a y , otteniamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + c'(y)$$

Confrontando l'espressione precedente con la ii) troviamo $c'(y) = 0$ da cui $c(y) = k$ Quindi,a meno di una costante additiva,la funzione

$$\Phi(x,y) = \mathbf{arctan}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad y \neq 0$$

non è una funzione potenziale di **F** in quanto il suo dominio non coincide con quello del campo. Il campo vettoriale considerato è conservativo nel semipiano $y > 0$ e nel semipiano $y < 0$.

3. Sia

$$\mathbf{F}(x,y,z)=3x^2y\sin z\,\hat{\mathbf{i}}+x^3\sin z\,\hat{\mathbf{j}}+\left(x^3y\cos z+1\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Essendo

$$rot\,\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=0$$

e dato che il dominio di **F** è tutto lo spazio tridimensionale che è semplicemente connesso, ne consegue che **F** è conservativo.

Se Φ è una funzione potenziale per **F**, deve necessariamente essere

$$i)\frac{\partial F_i}{\partial x}=3x^2y\sin z \quad ; \quad ii)\frac{\partial \Phi}{\partial y}=x^3\sin z \quad ; \quad iii)\frac{\partial \Phi}{\partial z}=x^3y\cos z+1 \ .$$

Integrando, per esempio, la *i*) rispetto a *x* si ottiene

$$\text{a) }\ \Phi(x,y,z)=x^3y\sin z+c(y,z)$$

dove $c(y,z)$ è una costante rispetto a *x*. Derivando la a) rispetto ad *y* si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=x^3\sin z+\frac{\partial c}{\partial y}$$

e per confronto con la *ii*) si deduce che $c(y,x)$ non dipende da *y*.

Se poniamo $c(y,z)=g(z)$

$$\text{b) }\ \Phi(x,y,z)=x^3y\sin z+g(z)$$

Infine, derivando la b) rispetto a *z* e per confronto con la *iii*) , si ottiene $g'(z)=1$ e quindi (a meno di una costante additiva) è

$$\Phi(x,y,z)=x^3y\sin z+z.$$

4. Sia $a>0$ *e*

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(2xy+\cos(x+y^2))\hat{\mathbf{i}}+(a^z+x^2+2y\cos(x+y^2))\hat{\mathbf{j}}+(ya^z\ln a)\hat{\mathbf{k}}$$

Poiché il dominio **F** è semplicemente connesso e **F** è irrotazionale ne consegue che **F** è conservativo. Per determinare una funzione potenziale Φ procediamo come nell'esempio precedente.Abbiamo

$$i)\frac{\partial \Phi}{\partial x}=2xy+\cos(x+y^2) \quad ; \quad ii)\frac{\partial \Phi}{\partial x}=a^z+x^2+2y\cos(x+y^2) \quad ; \ iii)\frac{\partial \Phi}{\partial x}=ya^z\ln a$$

Integrando la *iii*) rispetto a z otteniamo

a) $\Phi(x,y,z) = ya^z + c(x,y)$

Derivando la a) rispetto a y e per confronto con la *ii*) si ha

$$a^z + \frac{\partial c}{\partial y} = a^z + x^2 + 2y\cos(x+y^2)$$

da cui

$$c(x,y) = yx^2 + \sin(x+y^2) + g(x).$$

Sostituendo $c(x,y)$ nella a) otteniamo

b) $\Phi(x,y,z) = ya^z + yx^2 + \sin\left(x+y^2\right) + g(x).$

Infine, derivando la b) rispetto ad x e per confronto con la *i*) otteniamo g(x)-k (costante) e quindi, a meno di una costante additiva,

$$\Phi(x,y,z) = ya^z + yx^2 + \sin\left(x+y^2\right).$$

5. Il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2-1}\hat{\mathbf{i}} + \frac{2y}{x^2+y^2-1}\hat{\mathbf{j}} \qquad x^2+y^2-1 \neq 0$$

è conservativo in quanto

$$\mathbf{F}(x,y) = \nabla\Phi(x,y) \text{ dove } \quad \Phi(x,y) = \ln\left|x^2+y^2+1\right| \qquad x^2+y^2+1 \neq 0$$

più precisamente è

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \ln(x^2+y^2-1) + c_1 & x^2+y^2 > 1 \\ \ln(-x^2-y^2+1) + c_2 & x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

6. Stabilire se il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\frac{1}{2+\cos x}\hat{\mathbf{i}}+z\sin 2y\,\hat{\mathbf{j}}+\sin^2 y\,\hat{\mathbf{k}}$$

è conservativo. In caso affermativo determinare una funzione potenziale.

Svolgimento. Essendo il dominio di $\mathbf{F}$ semplicemente connesso (in quanto $\mathbf{F}$ è definito in $\Re^3$) ed essendo $\mathbf{rot\,F}=\nabla\times\mathbf{F}=0$, segue che $\mathbf{F}$ è conservativo (cioè esiste una funzione Φ che soddisfa l'equazione $\mathbf{F}=\nabla\Phi$). Per determinare una funzione potenziale $\Phi=\Phi(x,y,z)$ procedendo come negli esempi precedenti si ha

i) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=\sin^2 y\Rightarrow\Phi=z\sin^2 y+c(x,y)$

ii) $z\sin 2y=z2\sin y\cos y+\dfrac{\partial c}{\partial y}\Rightarrow c(x,y)=c(x)$

Da i) e ii) segue che $\Phi=z\sin^2 y+c(x)$

iii) $\dfrac{1}{2+\cos x}=c'(x)\quad\Rightarrow\; c(x)=\displaystyle\int\frac{1}{2+\cos x}dx$

Per risolvere l'integrale precedente si osservi che

$$2+\cos x=2+\cos 2\frac{x}{2}=2\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}.$$

ovvero

$$2+\cos x=3\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right)$$

Allora, sostituendo $\tan\dfrac{x}{2}=t$, si ottiene

$$\int\frac{1}{2+\cos x}dx=\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right)}dx=2\int\frac{1}{3+t^2}dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)+c$$

Quindi, a meno di una costante additiva, è

$$\Phi(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} \right) + z \sin^2 y$$

Teorema. Sia Φ un campo scalare di classe $C^{(1)}(\Omega)$ dove Ω è un aperto connesso dello spazio tridimensionale. Per ogni coppia di punti A e B connessi da una curva γ contenuta in Ω, regolare a tratti é specificata dall'equazione vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad a \le t \le b$, si ha

$$\int_\gamma \nabla \Phi \cdot d\mathbf{r} = \Phi[\mathbf{r}(b)] - \Phi[\mathbf{r}(a)] = \Phi(B) - \Phi(A)$$

Dimostrazione. Siano A e B due punti qualsiasi in Ω e congiungiamoli tramite una curva γ contenuta in Ω, regolare a tratti e di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad a \le t \le b$. Supponiamo inizialmente che γ sia regolare in [a, b]. Allora l'integrale curvilineo del $\nabla\Phi$ da A a B lungo γ è dato da

$$\int_\gamma \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla\Phi[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt .$$

Se poniamo $g(t) = \Phi[\mathbf{r}(t)]$, per la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$g'(t) = \nabla\Phi[\mathbf{r}(t)] \cdot r'(t) \qquad a \le t \le b$$

Essendo $\nabla\Phi$ continuo su Ω e γ regolare, segue che $g'(t)$ è continua in (a,b). Perciò

$$\int_a^b \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = \Phi[\mathbf{r}(b)] - \Phi[\mathbf{r}(a)] = \Phi(B) - \Phi(A)$$

Ciò dimostra il teorema ma nel caso in cui γ è regolare.

Se γ è regolare a tratti, dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in un numero finito n, di sotto - intervalli:

$$I_k = [t_{k-1}, t_k] \qquad k = 1,2,...,n \qquad t_0 = a \ ; \ t_n = b$$

in ognuno dei quali γ_k (la restrizione di γ a I_k) sia regolare. Se applichiamo il risultato appena dimostrato ad ogni γ_k , otteniamo

$$\int_\gamma \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{n} [\, g(t_k) - g(t_{k-1}) \,] =$$
$$= [g(t_1) - g(t_0)] + [g(t_2) - g(t_1)] + \ldots + [\, g(t_n) - g(t_{n-1}) \,] =$$
$$= g(t_n) - g(t_0) = g(b) - g(a) = \Phi(B) + \Phi(A)$$

Da quanto precede si evincono **le condizioni necessarie e sufficienti affinché un campo vettoriale sia un gradiente.**

Sia **F** un campo vettoriale (continuo) su un aperto connesso Ω contenuto in $\Re^3$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) **F** è il gradiente di qualche funzione potenziale Φ definita in Ω ($\mathbf{F} = \nabla\Phi$ in Ω).
ii) L’integrale curvilineo di **F** è indipendente dalla traiettoria in Ω.
iii) L’integrale curvilineo di **F** lungo ogni curva chiusa regolare a tratti è uguale a zero

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ per qualunque curva chiusa *C* liscia e continua a pezzi contenuta in D.

Pertanto se l’integrale curvilineo di **F** lungo una sola curva chiusa è diverso da zero, certamente **F** non è un gradiente.
Se il campo vettoriale **F** è conservativo in un aperto connesso D, se *C* è una curva regolare a tratti contenuta in D i cui estremi sono un punto A (a,b,c) fissato in D e un punto arbitrario P (x,y,z), allora il valore dell'integrale di linea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ non dipende dalla curva $C \subset D$ ma dal punto P e si dimostra che la funzione

$$\Phi(\, x, y, z \,) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

è un potenziale per **F** ovvero che $\nabla\Phi = \mathbf{F}$
Pertanto, quando è possibile, si può costruire una funzione potenziale Φ integrando lungo la

spezzata costituita dai segmenti i cui estremi sono

$$A(a,b,c) \;\; ; \;\; A'(x,b,c) \quad ; \quad A'(x,y,c) \quad ; \quad P(x,y,z)$$

dove:

i) Il segmento AA' è parallelo all'asse x e può essere specificato dall'equazione

$$\mathbf{r}(u) = u\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}} \qquad u \in [a,x]$$

ii) Il segmento A'A" è parallelo all'asse y e può essere specificato dall'equazione

$$\mathbf{r}(v) = x\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}} \qquad v \in [b,y]$$

iii) Il segmento A"P è parallelo all'asse z e può essere specificato dall'equazione

$$\mathbf{r}(w) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}} \qquad w \in [c,z]$$

In altre parole è

$$\Phi(x,y,z) = \int_a^x F_1(u,b,c)du + \int_b^y F_2(x,v,c)dv + \int_c^z F_3(x,y,w)dw =$$

$$= \int_a^x F_1(t,b,c)dt + \int_b^y F_2(x,t,c)dt + \int_c^z F_3(x,y,t)dt$$

Invarianza di un integrale di linea rispetto la deformazione della traiettoria

Siano P e Q due funzioni di classe $C^{(2)}$ in un aperto connesso Ω del piano x - y. Supponiamo che ovunque in Ω sia $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Siano C_1 e C_2 curve semplici, chiuse e regolari a tratti, contenute in Ω, che soddisfano le seguenti condizioni:

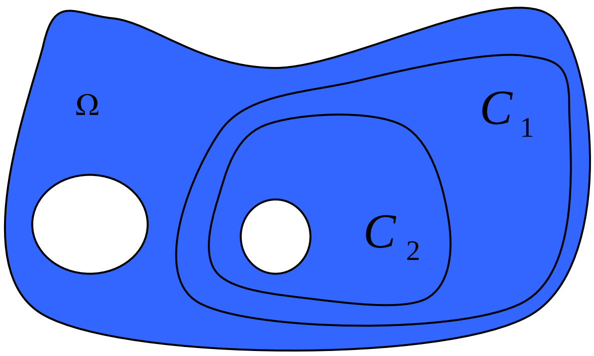
i) C_2 sta nell'interno di C_1 ;

ii) i punti che sono interni a C_1 ed esterni a C_2 stanno in Ω.

Allora si ha

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

dove le due curve sono percorse entrambe nello stesso verso.



Forme differenziali

Sia $\mathbf{F}(x)=(F_1(x),F_2(x),F_3(x))$ un campo vettoriale definito su un aperto connesso $A \subset \Re^3$ e sia $\Phi = \Phi(x)$ un campo scalare di classe $C^{(1)}(A)$. Se risulta

$$\mathbf{F}(x) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) = grad\ \Phi(x) \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in A$$

le seguenti proposizioni sono equivalenti:

i) **F** è un campo vettoriale conservativo e Φ è una funzione potenziale per **F**;

ii) La forma differenziale

$$w = \sum_{i=1}^{3} F_i(x)dx_i = F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + F_3(x)dx_3$$

è esatta e Φ è una primitiva di *w*, ovvero

$$w = d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}dx_3 = F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + F_3(x)dx_3$$

Se per ogni $x \in A$ risulta: F di classe $C^{(1)}(A)$ e $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad i, j = 1, 2, 3$

si dice che la forma differenziale w è chiusa.

In $\Re^3$ la forma differenziale $w = F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$

è chiusa se e solo se $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ dove

$$\mathbf{F} = F_1(x,y,z)\hat{\mathbf{i}} + F_2(x,y,z)\hat{\mathbf{j}} + F_3(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}$$

Non è difficile verificare che, se $w \in C^{(2)}(A)$ allora la proposizione:

una forma differenziale w esatta è chiusa, corrisponde alla proposizione: un campo vettoriale conservativo è irrotazionale $\mathbf{F} = \nabla \cdot \Phi \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F}$.

Sussiste il seguente

Teorema: Sia A un aperto semplicemente connesso e sia w una forma differenziale di classe $C^{(1)}(A)$.Allora **w è esatta se e solo se w è chiusa.**

Ovvero: **F** è conservativo se e solo se **F** è irrotazionale $\mathbf{F} = \nabla \cdot \Phi$ se e solo se $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

Esempi vari

Esempio. Verificare che il campo vettoriale **F** dato è conservativo e determinare la corrispondente funzione potenziale.

$$\mathbf{F}(x,y,z)=x^z\cos y\,\hat{\mathbf{i}}-\frac{x^{z+1}}{z+1}\sin y\,\hat{\mathbf{j}}+x^{z+1}\cos y\left(\frac{\ln x}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Essendo

$$\nabla\times F=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}=0$$

segue **F** conservativo: $\mathbf{F}=\nabla\Phi \quad \forall(x,y,z):x>0 \quad , \quad z\neq -1$

***osservazioni**:*

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}=-\sin y\,x^{z+1}\left(\frac{\ln x(z+1)-1}{(z+1)^2}\right)=-x^{z+1}\sin y\left(\frac{\ln x}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}=\left[(z+1)x^2\sin y\left(\frac{\ln x}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)+\frac{x^{z+1}}{z+1}\frac{1}{x}\right]\cos y=$$

$$\cos y\,x^z\left(\ln x-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+1}\right)=\cos y\,x^z\,\ln x$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=x^z\cos y\Rightarrow\Phi(x,y,y)=\frac{x^{z+1}}{z+1}\sin y+\frac{\partial c_1}{\partial y}\Rightarrow c_1(y,z)=c_2(y,z)$$

$$-x^{z+1}\cos y\left(\frac{\ln x}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)=-x^{(z+1)}\cos y\left(\frac{\ln x}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)+c_2'(z)\Rightarrow c_2(z)=c$$

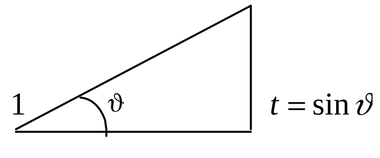
Pertanto

$$\Phi=(x,y,z)=\frac{x^{z+1}}{z+1}\cos y+c$$

12.(6.4) Calcolare il lavoro del campo di forza $\mathbf{F}=\left(y^2\cos x+z^3\right)\hat{\mathbf{i}}+(2y\sin x-4)\hat{\mathbf{j}}+\left(3xz^2+2\right)\hat{\mathbf{k}}$ quando una particella si muove lungo la curva $\quad x=\arctan t\ ;\ y=1-2t\ ;\ z=3t-1 \quad t\in[0,1]$.

$$\text{i) }\mathbf{I}=\int_0^1\left\{\left[(1-2t)^2\cos(\arcsin t)+(3t+1)^3\right]\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+[2(1-2t)t-4](-2)+\left[3(3t-1)^2\arcsin t+2\right]3\right\}dt$$

Essendo



$$\cos\vartheta=\sqrt{1+t^2}=\cos(\arcsin t)$$

$$\int_0^1 (1+2t)\underbrace{\cos(\arcsin t)dt}_{=1} = 1+4\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=3-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 9(3t-1)^2 \arcsin t\,dt = 4\pi - \int_0^1 (3t-1)^3 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Segue che

$$I=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-2\right)(-4)+4\pi+6=\frac{1}{3}-2+\frac{8}{3}+8+4\pi+6=15+4\pi\ .$$

ii) $\mathbf{F}=\nabla\Phi \qquad \Phi(x,y,z)=y^2\sin x+z^3x-4y+2z$

$$L=\Phi\left(\frac{\pi}{2},-1,2\right)-\Phi(0,1,-1)=9+4\pi-(-6)=15+4\pi$$

13.(6.4)

$$\int_0^1\left\{[2t\sin(\pi t)-(1+t)]+[\pi t^2\cos(\pi t)-3(1+t)]-t\right\}dt=$$

$$=\int_0^1 2t\sin(\pi t)dt-\int_0^1(4+5t)dt+t^2\sin(\pi t)\Big|_0^1-2\int_0^1 t\sin(\pi t)dt=$$

$$=-4-\frac{5}{2}=-\frac{13}{2}$$

8. Determinare il lavoro fatto dal campo di forza

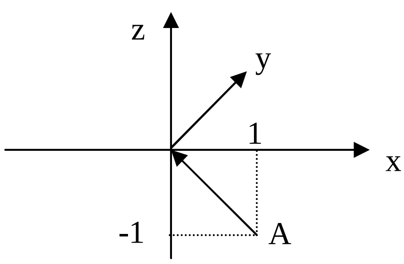
$$\mathbf{F}=(x+y)\hat{\mathbf{i}}+(x-z)\hat{\mathbf{j}}+(z-y)\hat{\mathbf{k}}$$

quando un corpo si muove da $A(1,0,-1)$ a $B(0,-2,3)$ lungo una qualsiasi curva liscia o liscia a tratti i) lungo la retta che passa per A e B

$$\mathbf{r}(t)=A+t(B-A) \qquad t\in[0,1]$$

$$x=1-t\ ,\quad y=-2t\ ,\quad z=-1+4t$$

$$L=\int_0^1[-(1-3t)-2(2-5t)+4(-1+6t)]dt=\int_0^1(37t-9)dt=\frac{37}{2}-9=\frac{19}{2}$$



i) lungo una spezzata $AO \cup OB$

Essendo, lungo AO, $z = -x$ segue che

$$x = -t \quad \text{e} \quad z = t \qquad -1 \le t \le 0$$

è una parametrizzazione che percorre il segmento AO da A all'origine.

$$L_1 = \int_{-1}^{0} [t + t]dt = -1$$

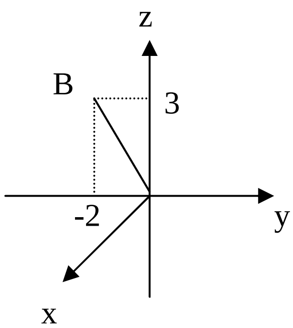
Essendo, lungo OB, $z = -\frac{3}{2}y$, segue che

$$x = 0, \quad y = -\frac{2}{3}t, \quad z = t \qquad 0 \le t \le 3$$

è una parametrizzazione che percorre il segmento OB dall'origine a B.

$$L_2 = \int_{0}^{3} \left(\frac{2}{3}t + \frac{5}{3}t \right) dt = \frac{7}{3}\frac{9}{2} = \frac{21}{2}$$

$$L = \frac{21}{2} - 1 = \frac{19}{2}$$



ii) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-2}^{0} 2\,dt = -4; \qquad \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{0}^{1} (t-2)dt = \frac{3}{2}; \quad \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{3} (t+2)dt = 12 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 12 - 4 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$$

9. Sia

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}\right) \quad \Rightarrow \qquad rot\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

Calcolare

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

dove

i) $\quad C: x^2+y^2=r^2$ percorsa nel verso antiorario una sola volta.

ii) C è un rettangolo di vertici $(-1,1),\ (1,1),(-1,-1),\ (1,-1)$.

iii) C è il rettangolo di vertici $(-a,b),\ (-a,2b),(a,b),(a,2b)$ con a e b positivi.

iv) C è la frontiera del dominio: $1\le x^2+y^2\le 4 \quad y\ge 0$.

Svolgimento.

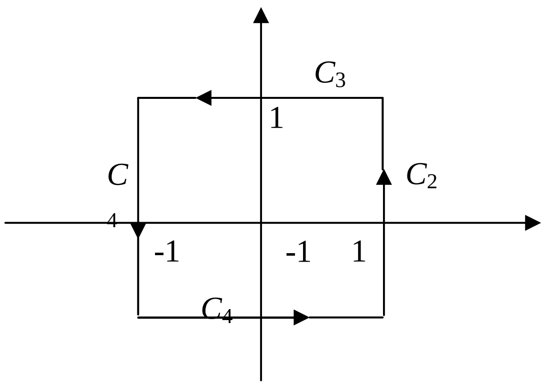
i) Una rappresentazione parametrica di C è: $\quad x=a\cos t,\ y=a\sin t$ con $t\in[0,2\pi]$.

Allora

$$\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a(-\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t)(a\cos t)}{a^2}dt = 2\pi$$

ii) $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} =$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2} + \int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2} + \int_{-1}^{1}\frac{-dt}{1+t^2} + \int_{-1}^{1}\frac{-dt}{1+t^2} = 8\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2} = 2\pi$$



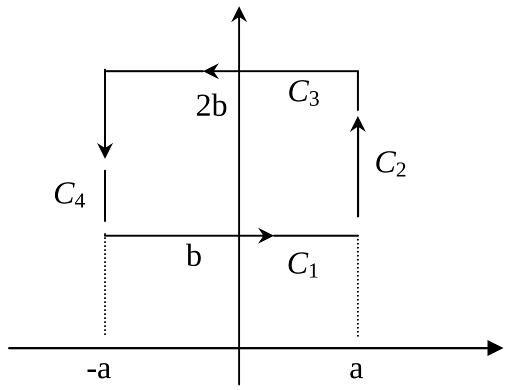
$C_1: x=t, \quad y=-1 \quad -1\le t\le 1$

$C_2: y=t, \quad x=1 \quad -1\le t\le 1$

$-C_3: \ x=t, \quad y=1 \quad -1\le t\le 1$

$-C_4: \ y=t, \quad x=-1 \quad -1\le t\le 1$

iii)

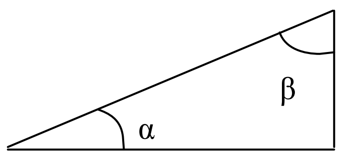


$$C_1: x=t,\quad y=b \qquad -a\le t\le a$$
$$C_2: y=t,\quad x=a \qquad b\le t\le 2b$$
$$-C_3: x=t,\quad y=2b \qquad -a\le t\le a$$
$$-C_4: y=t,\quad x=-a \qquad b\le t\le 2b$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{-b\,dt}{t^2+b^2}+\int_{b}^{2b}\frac{a\,dt}{t^2+a^2}-\int_{-a}^{a}\frac{-2b\,dt}{t^2+4b^2}-\int_{b}^{2b}\frac{-a\,dt}{t^2+a^2}=2\int_{0}^{a}\frac{-b\,dt}{t^2+a^2}+2\int_{b}^{2b}\frac{a\,dt}{t^2+a^2}+4\int_{0}^{a}\frac{b\,dt}{t^2+4b^2}=$$

$$=2\arctan\frac{a}{b}+2\left(\arctan\frac{2b}{a}-\arctan\frac{a}{b}\right)+2\arctan\frac{a}{2b}=$$

$$=-2\left(\arctan\frac{a}{b}+\arctan\frac{b}{a}\right)+2\left(\arctan\frac{2b}{a}+\arctan\frac{a}{2b}\right)=-2\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{2}=0$$



$$y=x\tan\alpha \qquad \alpha=\arctan\frac{y}{x}$$
$$\beta=\arctan\frac{x}{y}$$
$$x=y\tan\beta$$

iii) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2} \Rightarrow \int_{-2}^{-1}0\,dt-\int_{0}^{\pi}dt+\int_{1}^{2}0\,dt+\int_{0}^{\pi}dt=0$

Confrontare con $\displaystyle\mathbf{F}=\frac{2}{x^2+y^2}\left(x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}\right) \Rightarrow rot\,\mathbf{F}=0$

$$\int_{C:x^2|y^2=a^2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$$

10. $\mathbf{F} = (axy + z)\hat{\mathbf{i}} + x^2\,\hat{\mathbf{j}} + (bx + 2z)\hat{\mathbf{k}}$

è conservativo se e solo se $rot\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$ ovvero se e solo se b = 1 e a = 2.

Infatti

$$\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 = 0 \qquad \text{se } b = 1$$

$$\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 0 \qquad \text{se } a = 2.$$

Pertanto è

$$\mathbf{F} = (2\,xy + z)\hat{\mathbf{i}} + x^2\,\hat{\mathbf{j}} + (x + 2z)\hat{\mathbf{k}} = \nabla\,\Phi$$

se

i) $\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,y} = x^2$

ii) $\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,x} = 2\,xy + z \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y, z) = x^2 y + c(x, z) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,\Phi} = 2\,xy + \dfrac{\partial\,c}{\partial\,x}$

iii) $\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,z} = x + 2\,z$

$$2\,xy + z = 2\,xy + \frac{\partial\,c}{\partial\,x} \qquad \Rightarrow \qquad c(x, z) = zx + c(z)$$

pertanto

$$\Phi(x, y, z) = x^2 y + xz + c_1(z)$$

$$x + 2z = x + \frac{\partial\,c_1(z)}{\partial\,z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\,c_2(z)}{\partial\,z} = 2z \quad \Rightarrow \quad c_1(z) = z^2 + k$$

$$\Phi(x, y, z) = x^2 y + xz + z^2 + k$$

$$\Phi(0, 0, 3) - \Phi(1,1,0) = 9 - 1 = 8$$

11. Calcolare

$$I = \int_{(1;1)}^{(2;3)} (x + 3y)dx + (y + 3x)dy\,.$$

Svolgimento. L’integrale dato è indipendente dal contorno di integrazione in quanto

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x+3y)=3\ ;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y+3x)=3$$

e quindi $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ (sull'intero piano *XY*).

Come percorso di integrazione scegliamo la linea poligonale nella quale i segmenti sono paralleli agli assi coordinati. Sul primo segmento abbiamo $y=1,\ \ dy=0 \quad 1\le x\le 2$, sul secondo $x=2,\ \ dx=0 \quad 1\le y\le 3$

Conseguentemente,

$$I=\int_1^2 (x+3)dx+\int_1^2 (y+6)dy=\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]+\left[\frac{y^2}{2}+6y\right]=2+6-\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+18-\frac{1}{2}-6=20\frac{1}{2}.$$

12. Trovare la primitiva *U*, della forma differenziale $dU=[y+\ln(x+1)]dx+(x+1-e^y)dy$

Svolgimento. Abbiamo $P=y+\ln(x+1);\quad Q=x+1-e^y;\qquad \frac{\partial Q}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}=1.$

Assumendo $x_0=0$, $y_0=0$ e che il contorno *K* è una linea poligonale OMN (Fig. 1).

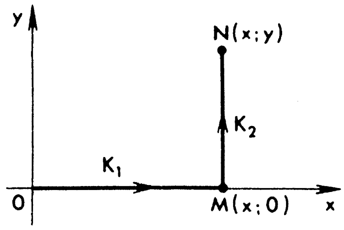


Fig. 1

$$U(x,y)=\int_0^x \ln(x+1)dx+\int_0^y (x+1-e^y)dy=$$

$$=[x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)]+[xy+y-e^y]=(x+1)\ln(x+1)-x+xy+y-e^y+1+C$$

13. $\mathbf{F}(x,y,z)=3x^2y\sin z\,\hat{\mathbf{i}}+x^3\sin z\,\hat{\mathbf{j}}+\left(x^3y\cos z+1\right)\hat{\mathbf{k}}$

Svolgimento. Essendo

$\nabla\cdot\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=0$ in $\Re^3\Rightarrow\exists\Phi$ tale che $\mathbf{F}=\nabla\cdot\Phi$

i) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=3x^2y\sin z\ \Rightarrow\ \Phi=x^3y\sin z+c(y,z)$

ii) $x^3y\sin z=x^3y\sin z+\dfrac{\partial c}{\partial y}\Rightarrow c(y,z)=c(z)$

Da i) e ii) $\Rightarrow\Phi=x^3y\sin z+c(z)$

iii) $x^3y\cos z+1=x^3y\sin z+c'(z)\Rightarrow c(z)=z$

Quindi

$$\Phi(x,y,z)=x^3y\sin z+z$$

Oppure se $P_0(0,0,0)$ allora

$$\Phi(x,y,z)=\int_0^x F_1(u,0,0)du+\int_0^y F_2(x,v,0)dv+\int_0^z F_3(x,y,w)dw$$

poiché i primi due integrali sono uguali a 0 si ha

$$\Phi(x,y,z)=\int_0^z\left(x^3y\cos w+1\right)dw=\left(x^3y\sin w+w\right)\Big|_0^z=x^3y\sin z+z$$

14. $\mathbf{F}(x,y,z)=\left[2xy+\cos(x+y^2)\right]\hat{\mathbf{i}}+\left[a^z+x^2+2y\cos\left(x+y^2\right)\right]\hat{\mathbf{j}}+ya^z\ln a\hat{\mathbf{k}}$; $a>0$

Svolgimento.

Da $\nabla\cdot\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=0$ in $\Re^3\Rightarrow\exists\Phi$ tale che $\mathbf{F}=\nabla\cdot\Phi$, dove

$$\Phi(x,y,z)=\int_0^x F_1(u,0,0)du+\int_0^y F_2(x,v,0)dv+\int_0^z F_3(x,y,w)dw=$$

$$=\int_0^x\cos u\,du+\int_0^y\left(1+x^2+2v\cos\left(x+y^2\right)\right)dv+\int_0^z y\,a^w\ln(a)dw=$$

$$=\sin x+y+x^2y+\sin(x+y^2)-\sin x+y\left(a^z-1\right)=x^2y+ya^z+\sin\left(x+y^2\right)$$

Alcune proprietà della divergenza

Un campo vettoriale $\mathbf{F} = F_1(x,y,z)\hat{\mathbf{i}} + F_2(x,y,z)\hat{\mathbf{j}} + F_3(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}$ è detto *solenoidale* in un dominio D se $\nabla \cdot \mathbf{F} = div\mathbf{F} = 0$.

Poiché la divergenza del rotore di un campo vettoriale è nulla ne consegue che:
il rotore di qualunque campo vettoriale è solenoidale.

Esempi

i) Se $\nabla^2\Phi = 0$ e $\nabla^2\Psi = 0$ allora $\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi$ è *solenoidale*

Infatti

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi) = \nabla \cdot \left[\Phi\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \right) - \Psi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \right) \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \right) + \left(\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right) + \left(\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right) = \Phi\nabla\psi - \Psi\nabla\Phi = 0$$

Oppure da $\quad \nabla \cdot \Phi\mathbf{F} = \nabla\Phi \cdot \mathbf{F} + \nabla\Phi \cdot \mathbf{F} \Rightarrow \nabla \cdot (\Phi\nabla\Psi) = \nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Phi\nabla \cdot \nabla\Psi$

$$\nabla \cdot (\Psi\nabla\Phi) = \nabla\Psi \cdot \nabla\Phi + \Psi\nabla \cdot \nabla\Phi$$

Pertanto

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi) = (\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Phi\nabla^2\Psi) - (\nabla\Psi\nabla\Phi + \Psi\nabla^2\Phi) = 0$$

ii) Se **F** e **G** sono conservativi $(\mathbf{F} = \nabla\Phi \; e \; \mathbf{G} = \nabla\Psi)$ *allora* $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ sono solenoidali.
Infatti

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F}(\nabla \times \mathbf{G}) = \underbrace{(\nabla \times \nabla\Phi)}_{=0} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F}\underbrace{(\nabla \times \nabla\Psi)}_{=0} = 0$$

in quanto è sempre vero $\nabla \times \nabla\Phi = 0$

Esempi

1. $\nabla\times(\Phi\nabla\Psi)=\nabla\times\left[\Phi\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)\right]=\nabla\times\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x} & \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y} & \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\underbrace{\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z}}_{=0}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\underbrace{\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z}}_{=0}\right)\hat{\mathbf{i}}+$$
$$+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\underbrace{\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}}_{=0}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\underbrace{\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial x}}_{=0}\right)\hat{\mathbf{j}}+$$
$$+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\underbrace{\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}}_{=0}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\underbrace{\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x}}_{=0}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{k}}=\nabla\Phi\times\nabla\Psi$$

2. $\nabla\cdot(\Phi\nabla\Psi)=\nabla\cdot\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)=$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = \nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Phi\nabla^2\Psi$$

3. $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \cdot \left[(F_2G_3 - F_3G_2)\hat{\mathbf{i}} + (F_3G_1 - F_1G_3)\hat{\mathbf{j}} + (F_1G_2 - F_2G_1)\hat{\mathbf{k}}\right] =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial F_2}{\partial x} G_3 + F_2 \frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial x} G_2 - F_3 \frac{\partial G_2}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial F_3}{\partial y} G_1 + F_3 \frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} G_3 - F_1 \frac{\partial G_3}{\partial y} + \\
&+ \frac{\partial F_1}{\partial z} G_2 + F_1 \frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z} G_1 - F_2 \frac{\partial G_1}{\partial z} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -F_1\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) - F_2\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) - F_3\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) + \\
&- G_1\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - G_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) - G_3\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F}(\nabla \times \mathbf{G})
\end{aligned}$$