Integrali curvilinei per campi scalari

Sia $F = F(t)$ una curva regolare definita in $[a,b]$ e sia *f* un campo scalare definito e limitato in un aperto Ω dello spazio tridimensionale che contiene il grafico γ di F.
L'integrale curvilineo di *f* lungo γ è definito dalla uguaglianza

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f[F(t)]\,(F'(t))dt$$

ogni qualvolta che l'integrale indicato a destra esiste, per esempio se *f* è continua su γ.
Sia $G = G(\tau) \quad \tau \in [c,d]$ una curva equivalente ad F, allora

$$\int_c^d f[G(\tau)]\,(G'(\tau))d\tau = \int_a^b f(t)(F'(t))dt$$

ovvero: *l'integrale curvilineo di un campo scalare lungo γ è invariante rispetto alla rappresentazione* parametrica che descrive γ (e quindi rispetto al verso di percorrenza).
Per dimostrare ciò, incominciamo ad osservare che se $t = u(\tau)$ è un cambiamento di parametro tale che $G(\tau) = F[u(t)]$

Allora

$$\int_a^b f[F(t)]\,(F'(t))dt = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(F[u(\tau)])\,(F'[u(\tau)])u'(\tau)d\tau$$

Per giustificare l'ultima uguaglianza precedente si osservi che:

i. se $u'(r) < 0$ allora $u'(a) = d$, $u^{-1}(b) = c$, $u^{-1}(r) = -\left|u^1(r)\right|$ e

$$\left|G'(\tau)\right| = \left|F'[u(\tau)]\right|\,\left|u'(\tau)\right| = -\left|F'[u(\tau)]\right|u'(\tau)$$

ii. se $u'(r) > 0$ allora $u^{-1}(a) = c$, $u'(b) = d$, $u^1(r) = \left|u^1(r)\right|$ e

$$\left|G'(\tau)\right| = \left|F[u'(\tau)]\right|\,\left|u'(\tau)\right| = \left|F[u(\tau)]\right|u'(\tau)$$

Osservazione

Sia $F = F(t) \quad t \in [a,b]$ una curva regolare a tratti e sia

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

una partizione di $[a,b]$ tale che la restrizione di F su $[t_{i-1}, t_i] \quad i = 1,\ldots,n$, sia un arco di curva regolare.

Indichiamo con γ la traiettoria descritta da F su $[a,b]$ e con γ_i quella corrispondente all'intervallo $[t_{i-1}, t_i]$. Allora

$$\int_\gamma f\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f\,ds$$

poiché

$$\int_{\gamma_i} f\,ds \qquad i = 1,2,\dots,n$$

è indipendente dalla rappresentazione parametrica che descrive γ_i ne consegue che per il calcolo degli integrali precedenti possiamo considerare per ogni γ_i la rappresentazione parametrica più conveniente.

1. Calcolare $\int_\gamma (x-y)ds$, dove γ è un tratto di linea tra $A(0,0)$ e $B(4,3)$.

   Svolgimento. L'equazione della retta *AB* è $y = (3/4)x$. Troviamo $y' = 3/4$ e conseguentemente

$$\int_\gamma (x-y)ds = \int_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx = \frac{5}{16}\int_0^4 x\,dx = \frac{5}{32}x^2\Big|_0^4 = \frac{5}{2}$$

Se pensiamo una curva γ (piana e sghemba) come a un filo di un materiale di densità lineare variabile $f(x,y,z)$ dove $f(x,y,z)$ è una massa per unità di lunghezza nel punto (x,y,z) di γ allora:

la massa totale M del filo è data dall'integrale curvilineo o di linea

$$M = \int_\gamma f(x,y,z)ds$$

Il baricentro del filo è definito come il punto le cui coordinate $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sono definite dalle equazioni

$$M\bar{x} = \int_\gamma x\, f(x,y,z)ds; \qquad M\bar{y} = \int_\gamma y\, f(x,y,z)ds; \qquad M\bar{z} = \int_\gamma z\, f(x,y,z)ds$$

Il momento di inerzia del filo rispetto ad un asse r è

$$I_\gamma = \int_\gamma d^2(p,r)\, f(x,y,z)ds$$

Dove $d(P,r)$ è la distanza del punto $P \equiv (x,y,z) \in \gamma$ dall'asse *r*.

In particolare i momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati sono definiti dalle relazioni

$$I_x = \int_\gamma (y^2+z^2) f(x,y,z)ds; \qquad I_y = \int_\gamma (x^2+z^2) f(x,y,z)ds; \qquad I_z = \int_\gamma (x^2+y^2) f(x,y,z)ds\,.$$

Un filo di densità costante è detto omogeneo, in questo caso il baricentro si dice anche centroide; in questo caso risulta

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_\gamma x\,dx; \qquad \bar{y} = \int_\gamma y\,dx; \qquad \bar{z} = \frac{1}{L}\int_\gamma z\,dx \quad \text{dove} \quad L = \int_\gamma dx\,.$$

2. Trovare la massa M dell'arco di curva $x = t,\ \ y = t^2/2,\ \ z = t^3/3 \quad (0 \le t \le 1)$, la cui densità lineare varia per $\gamma = \sqrt{2y}$.

   Svolgimento. Abbiamo

$$M = \int_\gamma \sqrt{2y}\,ds = \int_0^1 t\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{1 + t^2 + t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\; d\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)$$

   da cui ponendo $t^2 + \frac{1}{2} = v$ si ottiene

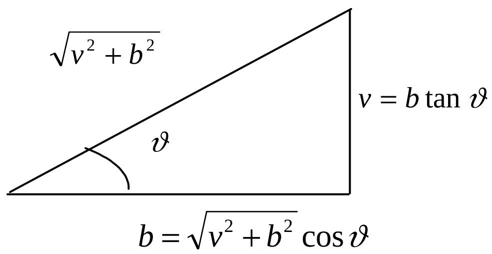
$$\int_0^1 t\sqrt{1 + t^2 + t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/2} \sqrt{v^2 + b^2}\,dv \quad \text{dove} \quad b^2 = \frac{3}{4}$$

   Essendo (vedi figura)

$$\int \sqrt{v^2 + b^2}\,du = \int \frac{b}{\cos\vartheta}\,\frac{b}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta =$$

$$= \frac{b^2}{2}\left[\frac{1}{\cos\vartheta}\tan\vartheta + \ln\left|\frac{1}{\cos\vartheta} + \tan\vartheta\right|\right] =$$

$$= \frac{b^2}{2}\left[\frac{\sqrt{v^2 + b^2}}{b}\,\frac{v}{b} + \ln\left|\frac{\sqrt{v^2 + b^2} + v}{b}\right|\right]$$



   segue che

$$\int_0^1 t\sqrt{1 + t^2 + t^4}\,dt = \frac{1}{2}\frac{b^2}{2}\left[\frac{\sqrt{v^2 + b^2}}{2}\,\frac{v}{b} + \ln\left|\frac{\sqrt{v^2 + b^2} + v}{2}\right|\right]_{1/2}^{3/2} = \frac{3}{16}\left[\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right) + \ln\left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}\right)\right]$$

3. Trovare le coordinate del centro di gravità dell'arco del cicloide

$$x = t - \sin t, \quad y = t - \cos t \qquad 0 \le t \le \pi$$

Svolgimento. Le coordinate del centro di gravità dell'arco omogeneo della curva γ possono essere calcolate con la formula

$$\bar{x} = \frac{1}{s}\int_\gamma x\,ds \ , \quad \bar{y} = \frac{1}{s}\int_\gamma y\,ds$$

dove s è la lunghezza dell'arco. Abbiamo

$$s = \int_0^\pi \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = \int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 4\,.$$

Poi

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\int_\gamma x\,ds = \frac{1}{4}\int_0^\pi (t-\sin t)2\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\sin t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2} + \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4}\int_\gamma y\,ds = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\cos t)2\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\cos t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

4 . Trovare le coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$ del baricentro dell'arco della circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$ posto nel primo quadrante, cioè della curva λ di equazioni parametriche

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Svolgimento. Poiché la curva γ della quale vogliamo trovare il baricentro ha un asse di simmetria (la bisettrice del 1° quadrante) risulta

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{1}{L}\int_\gamma x\,ds\,.$$

Essendo

$$ds = \sqrt{x^2 + y^2}\,dt = a\,dt$$

$$L = \int_\gamma ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\,dt = \frac{\pi}{2}a$$

$$\int_\gamma x\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos t\,dt = a^2$$

segue che

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{\pi}a$$

Quindi il baricentro di un quarto di circonferenza si trova sull'asse di simmetria e la sua distanza dal centro della circonferenza è $\frac{2\sqrt{2}a}{\pi}$

5. Calcolare il momento di Inerzia di una circonferenza di raggio a rispetto ad un diametro fisso.

   Svolgimento. Supponendo il diametro fisso sull'asse x risulta:

$$I_x = \int_0^{2\pi} y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 t\,a\,dt = \frac{a^3}{2}2\pi = \pi a^3$$

6. Trovare le coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$ del baricentro di un arco di circonferenza di raggio *a* e angolo al centro 2θ .

   Svolgimento. Fissiamo il riferimento in modo che l'asse *x* coincida con l'asse di simmetria dell'arco della circonferenza considerata. Allora $\bar{y} = 0$ e

$$L\bar{x} = \int_\gamma x\,ds = \int_{-\theta}^{\theta} a\cos t\,a\,dt = 2a^2\int_0^{\theta}\cos t\,dt = 2a^2 \sin\theta$$

$$\bar{x} = \frac{2a^2\sin\theta}{2a\theta} = \frac{a\sin\theta}{\theta}$$

Cosi il baricentro si trova sull'asse di simmetria, alla distanza $\frac{a\sin\theta}{\theta}$ dal centro della circonferenza.

7. Calcolare il baricentro dell'arco (asteroide)

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t \qquad\qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Svolgimento. Risulta $x = y$ e

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,ds = \frac{1}{L}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\, 3a\, \sin t \cos t\, dt = \frac{2}{5}a$$

Infatti

$$(ds)^2 = x^2 + y^2 = \left(3a\sin t\cos^2 t\right)^2 + \left(3a\cos t\sin^2 t\right)^2 =$$
$$= 9a^2\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$$

e $$L = \int_\gamma ds = \int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\, dt = 3a\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a$$

8. Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$x = t\cos t, \qquad y = t\sin t, \qquad z = t \qquad\quad t \in [0, t_0]$$

Calcolare $i)$ $L[\gamma]$; $ii)$ $\bar{z}$.

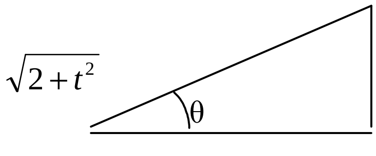
Svolgimento.

Essendo $\quad \dot{x} = \cos t\, t\sin t, \qquad \dot{y} = \sin t + t\cos t, \qquad \dot{z} = 1$

Abbiamo $\quad (ds)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2 + t^2$.

Allora procedendo come nell'esempio 2 si ottiene

i) $$L[\gamma] = \int_0^{t_0}\sqrt{2+t^2}\,dt = \left[\frac{t}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2+t^2}}{\sqrt{2}} - \ln\left|\frac{\sqrt{2+t^2}}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right|\right]_0^{t_0}$$



$$t = \sqrt{2}\tan\theta \qquad dt\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2+t_0^2}\cos\theta$$

ii) $$\bar{z}L = \int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\left[\left(2+t_0^2\right)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right].$$

9. Un filo omogeneo è disposto lungo l’arco di cicloide

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad t \in [0, 2\pi] \;\; a > 0$$

Determinare il momento d’inerzia rispetto all’asse x e le coordinate $(\overline{x}, \overline{y})$ del baricentro. (Si supponga la densità lineare uguale a 1).

i. $I_x = \int_\gamma y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \sqrt{x^2 + y^2}\, dt$

Essendo $x^2 + y^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$ e tenuto conto che $\left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2}$ con $t \in [0, 2\pi]$, si ha

$$I_x = 2a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \sin\frac{t}{2} dt = 8a^3 \int_0^{2\pi} \left(\sin^2\frac{t}{2}\right)^2 \sin\frac{t}{2} dt =$$

$$= 8a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)^2 \sin\frac{t}{2} dt = 16^2 \frac{a^3}{15} = \frac{256}{15} a^3$$

ii. E' $\overline{x} = \pi a$;

$$L\overline{y} = \int_\gamma y\, ds = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin\frac{t}{2} dt = 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\frac{t}{2} \sin\frac{t}{2} dt =$$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right) \sin\frac{t}{2} dt = 4a^2 \left[-2\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a^3 \frac{4}{3} = 8a\left(\frac{4}{3}a\right)$$

da cui $\overline{y} = \frac{4}{3}a$. Quindi $G\left(\pi a, \frac{4}{3}a\right)$.

10. Calcolare la massa m, le coordinate $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ del baricentro G, i momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati di un singolo anello di una molla avente la forma di un'elica di equazione

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = bt \qquad t \in [0, 2\pi]$$

se la densità nel punto (x, y, z) della molla è $x^2 + y^2 + z^2$.

Svolgimento.
E'

$$m=\int_\gamma \left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\int_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2+b^2\frac{(2\pi)^3}{3}\right)$$

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_\gamma x\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\frac{a}{m}\int_0^{2\pi}\cos t\left(a^2+b^2t^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{m}\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos t+b^2t^2\cos t\right)dt=\frac{6ab^2}{3a^2+4\pi^2b^2}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{m}\int_\gamma y\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{m}\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin t+b^2t^2\sin t\right)dt=-\bar{x}\pi$$

N.B. Se $f(x+T)=f(x)\Rightarrow\int_0^T=\int_{-T/2}^{T/2}$.

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\int_\gamma z\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{m}\int_0^{2\pi}\left(a^2t+b^2t^3\right)dt=\frac{3b\left(\pi a^2+2\pi^3b^2\right)}{3a^2+4\pi^2b^2}$$

$$I_x=\int_\gamma\left(y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin t+b^2t^2\right)\left(a^2+b^2t^2\right)dt=$$

$$=\sqrt{a^2b^2}\int_0^{2\pi}\left(a^4\sin^2t+a^2b^2t^2\sin^2t+a^2b^2t^2+b^4t^4\right)dt$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2t\,dt=\pi\qquad\int_0^{2\pi}t^2\sin^2t\,dt=\frac{4}{3}-\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{2\pi}t^2dt=\frac{1}{3}(2\pi)^3=\frac{8}{3}\pi\qquad\int_0^{2\pi}t^4dt=\frac{1}{5}(2\pi)^5=\frac{32\pi^5}{5}$$

$$I_x=\sqrt{a^2+b^2}\left[\pi a^4+a^2b^2\left(4\pi^3-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{32}{5}b^4\pi^5\right]$$

$$I_y=\sqrt{a^2+b^2}\left[\pi a^4+a^2b^2\left(4\pi^3+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{32}{5}b^4\pi^5\right]$$

$$I_z=\int_\gamma\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=a^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)dt=ma^2=a^2\sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2+\frac{8}{3}\pi^3b^2\right)$$

11. Un filo disposto lungo la circonferenza $x^2+y^2=a^2$. Se la densità lineare nel punto (x,y) è $|x|+|y|$, determinare la massa M e il momento d'inerzia rispetto ad un diametro.

Svolgimento. Essendo le equazioni parametriche della circonferenza C

$$x=a\cos t\ ,\qquad y=a\sin t\qquad t\in[0,2\pi]$$

si ha

i) $M=\int_\gamma(|x|+|y|)ds=\int_0^{2\pi}(|a\cos t|+|a\sin t|)\sqrt{x^2+y^2}\,dt=a^2\int_0^{2\pi}|\cos t|+|\sin t|\,dt=$

$$=a^2\int_0^{\pi/2}(\cos t+\sin t)dt+a^2\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos t+\sin t)dt-a^2\int_{\pi}^{3\pi/2}(\cos t+\sin t)dt+a^2\int_{3\pi/2}^{2\pi}(\cos t-\sin t)dt$$

Da cui $M=8a^2$.

ii) L'equazione di un generico diametro è $y-mx=0$. Pertanto se P è un punto di γ: $P(a\cos t,a\sin t)$ e denota il diametro si ha

$$d^2(P,r)=\left(\frac{|a\sin t-ma\cos t|}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2=\frac{a^2}{1+m^2}\left(\sin^2 t+m^2\cos^2 t-2m\sin t\cos t\right)=\frac{a^2}{1+m^2}H(t)$$

Posto $H(t)=\left(\sin^2 t+m^2\cos^2 t-2m\sin t\cos t\right)$

segue che

$$I_r=\int_\gamma d^2(P,r)(|x|+|y|)ds=\frac{a^2}{1+m^2}\int_0^{2\pi}H(t)a(|\sin t|+|\cos t|)a\,dt=$$
$$=\frac{a^4}{1+m^2}\left[\int_0^{\pi/2}H(t)(|\sin t|+|\cos t|)dt=...=\int_{3\pi/2}^{2\pi}H(t)(-|\sin t|+|\cos t|)dt\right]$$

Essendo $$\int H(t)\cos t\,dt=\frac{\sin^3 t}{3}+m^2\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)+\frac{2m}{3}\frac{\cos^3 t}{3}=B(t)$$

$$\int H(t)\sin t\,dt=-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}-m^2\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{2m}{3}\sin^3 t=A(t)$$

segue che

$$I_r=\frac{a^4}{1+m^2}\left\{[A(t)+B(t)]_0^{\pi/2}+[A(t)-B(t)]_{\pi/2}^{0}-[A(t)+B(t)]_{\pi}^{3\pi/2}+[A(t)+B(t)]_{3\pi/2}^{2\pi}\right\}=$$
$$=\frac{a^4}{1+m^2}4\left(1+m^2\right)=4a^2$$

Quindi il momento richiesto non dipende dal diametro.

Integrale di linea

Supponiamo che le funzioni $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ siano continue sui punti dell'arco AB della curva liscia C specificata dall'equazione $y=\varphi(x) \quad a \le x \le b$.

Consideriamo la *somma integrale*

$$\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

Dove Δx_k e Δy_k sono le proiezioni dell'arco elementare sugli assi.

L'integrale di linea del secondo tipo

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ sull'arco orientato AB è il limite della somma integrale sotto la condizione che il $\max \Delta x_k \to 0$ e il $\max \Delta y_k \to 0$.

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

Proprietà principali dell'integrale di linea del secondo tipo

1° *Un integrale di linea del secondo tipo cambia segno cambiando la direzione d'integrazione:*

$$\int_{BA} P\ dx + Q\ dy = -\int_{AB} P\ dx + Q\ dy$$

2° $$\int_{AB} P\ dx + Q\ dy = \int_{AB} P\ dx + \int_{AB} Q\ dy$$

Le altre proprietà sono analoghe a quelle dell'integrale del primo tipo.

Un integrale di linea del secondo tipo può essere calcolato con la formula

$$\int_{C} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_{a}^{b}\left\{P[x,\varphi(x)]+\varphi'(x)Q[x,\varphi(x)]\right\}dx$$

Se la curva C è specificata dalle equazioni parametriche x = x(t) ,y = y(t) dove $a \le t \le b$, allora abbiamo

$$\int_{C} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_{a}^{b}\left\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\right\}dt$$

Una formula analoga è vera anche per il calcolo di un integrale di linea del secondo tipo lungo C: se la curva è specificata dalle equazioni $x = x(t)$, $y = y(t), z = z(t)$ dove $a \le t \le b$, allora

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_a^b \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t) \}dt$$

Quanto segue costituisce una **interpretazione meccanica** dell'integrale precedente.
Sia C una curva liscia dello spazio tridimensionale descritta dall'equazione vettoriale

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} \qquad t \in [a,b] \quad (1)$$

Se riparametrizziamo la curva C in funzione della lunghezza dell'arco *s*, allora da

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}[t(s)]$$

si evince poiché t = t(s) è l'inversa di s = s(t) , segue che $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v}(t)$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{v(t)} = \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}$$

da cui il vettore tangente della curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ è un vettore unitario che si indica con $\hat{\mathbf{T}}(s)$:

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \, (2)$$

Premesso ciò, supponiamo che

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\hat{\mathbf{i}} + F_2(x,y,z)\hat{\mathbf{j}} + F_3(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}$$

sia un campo vettoriale continuo in un aperto Ω che contiene C.

Il lavoro *W* fatto dalla forza **F** durante lo spostamento di un corpo lungo *C*, nella direzione del moto, è dato da

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Si osservi che $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}$ dipende dall'orientazione di $\hat{\mathbf{T}}$ e quindi dalla parametrizzazione di C.

Essendo

$$d\mathbf{r} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$

segue

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz \quad (3)$$

Questo integrale (che è un integrale di linea della componente tangente di F lungo C) dipende dell'orientazione di C, nel senso che se $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ *e* $\mathbf{s}=\mathbf{s}(\tau)$ descrivono C nel verso opposto, allora

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

Se C è una curva chiusa, l'integrale di linea della componente tangente **F** lungo C è chiamato circuitazione di **F** lungo C. Il fatto che la curva sia chiusa è indicato spesso da un piccolo cerchio scritto sopra il segno d'integrale: l'espressione

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

denota quindi la circuitazione di **F** lungo la curva chiusa C.

Per il calcolo di questi integrali, per indagare che la curva chiusa è percorsa nel senso antiorario scriveremo $\oint_{C^+}$.

Oppure $\oint_{C^-} = -\oint_{C^+}$ per indicare che il percorso della curva è quello orario.

Nel caso di un arco liscio di equazione

x=x(t), y=y(t) $\quad a \le t \le b$,

è

$$\int_C F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz =$$

$$= \int_a^b \left\{ \mathbf{F}_1[x(t),y(t),z(t)]\frac{dx}{dt} + \mathbf{F}_2[x(t),y(t),z(t)]\frac{dy}{dt} + \mathbf{F}_3[x(t),y(t),z(t)]\frac{dz}{dt} \right\} dt$$

Se C è una curva liscia a pezzi: $C = C_1 \cup ..... \cup C_n$ l'integrale precedente è la somma degli integrali di linea sui vari archi lisci C_i $i = 1,......,n$ che costituiscono C:

$$\int_{\mathrm{C}} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathrm{C}_i}$$

1. Calcolare $\int_C x^2\, y\, dy - y^2 x dx$ se $x = \sqrt{\cos t}$, $y = \sqrt{\sin t}$ $0 \le t \le \pi/2$

Svolgimento. Essendo $dx = -\dfrac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\, dt$, $dy = \dfrac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}\, dt$

abbiamo $\int_c x^2 y\, dy - y^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \left(\cos t \sqrt{\sin t}\, \dfrac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} + \sin t \sqrt{\cos t}\, \dfrac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}} \right) dt = \dfrac{\pi}{4}$

Domini Connessi

Definizione 1. Un dominio D è connesso se per ogni coppia di punti A e B di tale dominio D, esiste una curva regolare a tratti, avente come estremi i punti A e B, interamente contenuta in D.

Definizione 2. Nel piano,un dominio connesso D è detto semplicemente connesso se l'interno di ogni curva chiusa, e regolare a tratti, appartenente a tale dominio D giace in D; in altre parole, se comunque si prenda una curva chiusa e regolare a tratti, questa è la frontiera di un insieme limitato contenuto in D.

Definizione3. Nello spazio tridimensionale un dominio D semplicemente connesso è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

i) Qualunque curva chiusa e regolare a tratti di D è la frontiera di una superficie che giace interamente in D.

ii) Se C_1 e C_2 sono due curve di D aventi gli stessi estremi allora, C_2 (oppure C_1) può essere deformata in modo continuo in C_1 (oppure C_2), rimanendo in D durante il processo di deformazione.

Nel piano, un dominio semplice connesso D non può avere buchi, nemmeno buchi costituiti da un solo punto. Ad esempio, il dominio della funzione $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ non è semplicemente connesso poiché l'origine non gli appartiene. (L'origine è un"buco"di quel dominio.) Nello spazio tridimensionale, un dominio semplicemente connesso può avere dei buchi. L'insieme di tutti i punti di $\Re^3$ esclusa l'origine è semplicemente connesso, come pure lo è l'esterno di una palla. Ma l'insieme di tutti i punti di $\Re^3$ soddisfacenti $x^2 + y^2 \succ 0$ non è semplicemente connesso. E neppure lo è l'interno di una ciambella chiamato in geometria **toro**.