Funzioni a valori vettoriali

Definizione 1. Un’ applicazione definita su un insieme di numeri reali il cui codominio è un insieme di $\Re^n$ è per definizione una funzione a valori vettoriali.
Se F denota una funzione a valori vettoriali allora $F(t)$ è un vettore che ha n componenti e si scrive

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)).$$

Così ogni funzione F a valori vettoriali dà origine a n funzioni $f_1, f_2, \cdots, f_n$ a valori reali i cui valori
nel punto t sono le componenti di $F(t)$.
Nel seguito il dominio di F sarà un intervallo che può essere anche infinito.

Definizione 2. Sia F una funzione a valori vettoriali definita su un intervallo I. Si dice che F è continua in $a \in I$ e si scrive

$$\lim_{t \to a} F(t) = F(a) \text{ ovvero } \lim_{t \to a} F(t) - F(a) = 0$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un numero positivo $\delta = \delta(\varepsilon, a)$ tale che

$$\|F(t) - F(a)\| < \varepsilon \text{ ogni qualvolta che } t \in I \text{ e } |t - a| < \delta$$

dove $\| \ \|$ denota la norma euclidea in $\Re^n$:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2} \qquad u = (u_1, ..., u_n)$$

Pertanto

$$\lim_{t \to a} F(t) = F(a) \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{t \to a} \|F(t) - F(a)\| = 0$$

Non è difficile dimostrare che

$$\lim_{t \to a} F(t) = F(a) \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{t \to a} f_i(t) = f_i(a) \qquad i = 1, ..., n$$

Si dice che F è continua in I quando F è continua in ogni punto di I. Da quanto precede: una funzione a valori vettoriali è continua se e solo se è continua ogni sua componente.
Analogamente: una funzione a valori vettoriali F è derivabile o integrabile su un intervallo I se ogni componente di F ha la corrispondente proprietà sullo stesso intervallo.

Se F è derivabile per t = a allora

$$F'(a) = \lim_{t\to a} \frac{F(t) - F(a)}{t - a} \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{t\to a} \left\| \frac{F(t) - F(a)}{t - a} - F'(a) \right\| = 0$$

e

$$\lim_{t\to a} \left\| \frac{F(t) - F(a)}{t - a} - F'(a) \right\| = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{t\to a} \frac{f_i(t) - f(a)}{t - a} = f_i'(a) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Ovviamente

$$\lim_{t\to a} \frac{F(t) - F(a)}{t - a} = F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

Definizione 3. Un' applicazione F a valori vettoriali definita e continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b] è per definizione una curva o un arco di curva.

L'immagine di una curva è detta sostegno di F oppure la traiettoria descritta da F da F(a) a F(b); le equazioni

$$x_1 = f_1(t)\ ,\ x_2 = f_2(t)\ ,\ x_n = f_n(t) \qquad t \in [a,b]$$

sono dette le equazioni parametriche della curva.

Ovviamente lungo una curva γ sono possibili due orientazioni. L'equazione della curva $F = F(t)$ determina una delle due possibili orientazioni: quella corrispondente alla direzione lungo la quale il parametro è crescente.
In altre parole l'equazione $F = F(t) \quad t \in [a,b]$ induce sulla curva l'orientazione dal punto $F(a)$ al punto $F(b)$.
Se F ha derivata F' continua in (a,b) e se $\|F'(t)\| \neq 0$ in (a,b) allora la curva è detta liscia o regolare.

Una curva F si dice regolare a tratti se esiste una suddivisione finita di [a,b]:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots. < t_n = b$$

tale che F risulti regolare in ogni intervallo aperto

$$(t_0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$$

Se risulta $F(a) = F(b)$ la curva si dice chiusa;
Se risulta $F(t_1) \neq F(t_2)$ per ogni $t_1, t_2 \in (a,b)$ con $t_1 \neq t_2$ allora la curva si dice semplice.

Curve piane. Una funzione F a valori vettoriali, definita e continua su un intervallo $[a,b]$ il cui condominio è un insieme di $\Re^2$ è per definizione una curva piana. Se

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t)) \qquad t \in [a,b]$$

allora le equazioni

$$x = f_1(t)\ ,\ y = f_2(t) \qquad t \in [a,b]$$

sono dette equazioni parametriche della curva e la variabile t è detta parametro della curva.
Generalmente le equazioni parametriche di una curva piana vengono indicate con

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t) \qquad t \in [a,b]$$

e la corrispondente funzione vettoriale con il vettore

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathrm{t}) = \mathrm{x(t)}\mathbf{i} + \mathrm{y(t)}\mathbf{j} \qquad t \in [a,b]$$

detto vettore posizione in quanto:
il grafico di una curva γ può essere pensato come la traiettoria descritta da un punto materiale in movimento la cui posizione all'istante *t* è individuata dal vettore $\mathbf{r}(t)$. Nell' intervallo di tempo da *t* a $t + \Delta t$ la particella si muove dalla posizione $\mathbf{r}(t)$ alla posizione $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ e

$$\frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta(t)} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}}{\Delta t}$$

è la sua velocità media. Se quando $\Delta t \to 0$ la velocità media ammette limite allora si dice che $\mathbf{r}(t)$ è differenziabile e tale limite è detto velocità (istantanea) della particella al tempo *t*. Il vettore velocità è indicato con $\mathbf{v}(t)$. La direzione di questo vettore velocità è tangente alla curva γ nel punto $\mathbf{r}(t)$ e punta nella direzione del moto. Il modulo (la norma euclidea) del vettore velocità: $v(t) = \|\mathbf{v}(\mathrm{t})\|$, è chiamato velocità scalare. Il vettore che si ottiene derivando il vettore velocità è detto vettore accelerazione e si indica con $\mathbf{a}(t)$:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$$

Esempi

1. *Moto circolare*

La funzione a valori vettoriali $F(t)$ di equazioni parametriche

$$x = a\cos\omega t \qquad y = a\sin\omega t \qquad t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right] \ , \ a > 0$$

è una curva chiusa, in quanto $F(0) = F\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = (a,0)$. Osservato che

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad , \ F(0) = F(a,0) \quad , \ F\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = (0,a)$$

si evince che il vettore posizione

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\mathbf{i} + a\sin\omega t\mathbf{j}$$

specifica la posizione, (all'istante t), di una particella che si muove su una circonferenza nel verso antiorario.

Essendo

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega a\sin\omega t\mathbf{i} + \omega a\cos\omega t\mathbf{j}$$

e quindi $\|\mathbf{v}(t)\| = v(t) = a\omega \neq 0$ per ogni t, segue che la curva è liscia. Inoltre la curva è semplice dato che le funzioni seno e coseno sono iniettive in $\left(0, \frac{2\pi}{\omega}\right)$. La curva non è né chiusa né semplice per $t \geq 0$.

Il vettore accelerazione (della particella) è dato dalla formula

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2\mathbf{r}(t)$$

la quale mostra che il vettore accelerazione è sempre opposto al vettore posizione. Pertanto se lo si pensa applicato alla posizione istantanea della particella che si muove lungo la circonferenza, il vettore accelerazione è sempre diretto verso il centro del cerchio. Per questo motivo la suddetta accelerazione è detta centripeta.

Osservazione

Siano $x = x(t), y = y(t) \quad t \in [a,b]$ le equazioni parametriche di una curva regolare. Se in $c \in (a,b)$ risulta $x'(c) \neq 0$, per esempio $x'(c) > 0$, per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno di c contenuto in (a,b) nel quale risulta $x'(t) > 0$, quindi, in questo intorno $x(t)$ è invertibile.

Se $t = t(x)$ è la funzione inversa della funzione $x = x(t)$, nel suddetto intorno risulta

$$y = y[t(x)] = f(x)$$

Da cui usando il teorema di derivazione composta, si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{dx/dt} = \frac{y'}{x'}$$

In altre parole, la traiettoria descritta dalla curva α, (nel suddetto intorno di *c*), è il grafico di una funzione di classe C^1 .
Se poi la curva è di classe C^2 risulta

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{1}{x'} = \frac{y''x' - y'x''}{(x')^3}$$

2. *Cicloide*

La curva F = F(t) di equazioni parametriche

$$x = (a(t - \sin t)),\ y = a(1 - \cos t) \qquad t \in [0, 2\pi], a > 0$$

è per definizione un arco di cicloide. Essendo

$$|F'(t)| = 2a\sin\frac{t}{2} \neq 0 \quad \text{in } (0, 2\pi)$$

segue che F è una curva regolare in $(0, 2\pi)$.
Da

$$x'(t) = a(1 - \cos t) > 0 \quad \text{in } (0, 2\pi)$$

segue che la funzione $x = x(t)$ è invertibile in $(0, 2\pi)$. Se $t = t(x) \quad x \in [0, 2\pi a]$ è la corrispondente inversa, allora la traiettoria descritta da F è il grafico della funzione

$$y = y(t) = y[t(x)] = a(1 - \cos t(x) \qquad x \in [0, 2\pi a]$$

la cui derivata è

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \qquad x \in (0, 2\pi a)$$

Agli estremi dell'intervallo $[0, 2\pi a]$ risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin t}{1-\cos t} = +\infty \qquad t \to 2\pi^- \Rightarrow \sin(t) \to 0^-$$
$$\lim_{x\to 2\pi a} \frac{dy}{dx} = \lim_{x\to 2\pi^-} \frac{\sin t}{1-\cos t} = -\infty \qquad t \to 2\pi^- \Rightarrow 1-\cos(t) \cong \frac{t^2}{2} \to 0^-$$

Per rappresentare graficamente la funzione $x = f(x)$ si osservi che risulta
(***N.B.*** $t : 0 \to \pi \Leftrightarrow x : 0 \to a\pi$; $t : \pi \to 2\pi \Leftrightarrow x : a\pi \to 2\pi a$)

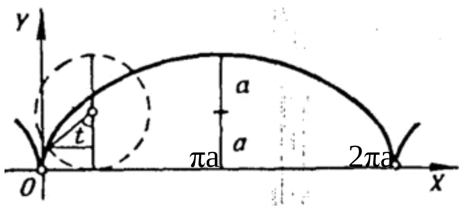
$$y'(x) > 0 \text{ in } (0, a\pi); \quad y'(x) < 0 \text{ in } (a\pi, 2a\pi)$$

E

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{y''x' - y'x''}{(x')^2}\frac{1}{x'} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2} < 0$$

in $(0, 2\pi a)$.

Pertanto il grafico dell'arco di cicloide è



2. *Asteroide*

La curva φ di equazioni parametriche

$$x = a\cos^3 t\,,\qquad y = a\sin^3 t\qquad\qquad t \in [0, 2\pi]$$

dove $a > 0$, è per definizione un asteroide.

Essendo $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = (a, 0)$ la curva è chiusa; essendo $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, a)$ segue che φ descrive la corrispondente traiettoria nel verso antiorario.

Da

$$|\varphi'(t)| = 3a\,|\sin t\ \cos t\,| = 0\qquad\quad t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$$

segue che φ è una curva regolare a tratti: φ è regolare negli intervalli

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right).$$

Osservato che

$$x'(t) = -3a\ \sin t\ \ \cos^2 t < 0\quad\ in\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

segue che la funzione $x = a\cos^3 t$ è invertibile in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Sia $t = t(x)$ la funzione inversa di $x = a\cos^3 t$, definita ovviamente in $[0, a]$, allora

$$y = y(x) = a\sin^3[t(x)]\qquad x \in [0, a]$$

è la funzione il cui grafico coincide con la traiettoria descritta da φ quando t varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$.

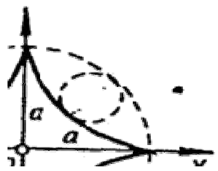
Essendo $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{y'}{x'}=-\tan t \qquad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

segue che $y=y(x)$ è decrescente in $(0,a)$.
Inoltre da
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{y''x'-y'x''}{(x')^3}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}>0$$

segue che la funzione è convessa.

Infine da
$$\lim_{x\to 0^+} y'(x)=\lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-}-\tan t=-\infty$$
$$\lim_{x\to a^-} y'(x)=\lim_{t\to 0^+}-\tan t=0$$

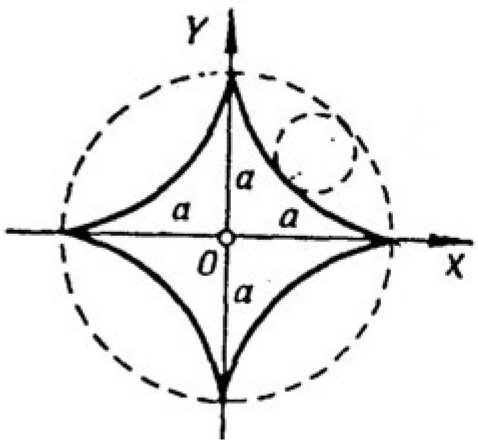
si evince che il grafico della funzione $y(x)$ in $[0,a]$ ovvero della curva $\varphi(t)$ in $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ è quello in figura



Per dedurre l'equazione cartesiana della curva si osservi che da
$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\cos t \qquad \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\sin t$$

Segue
$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

da cui si evince che la curva è simmetrica rispetto agli cartesiani. Pertanto il suo grafico è



27. Hypocycloid (astroid),
$$\begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$$
or $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Curve sghembe. Una funzione F a valori vettoriali, definita e continua su un intervallo $[a,b]$ il cui codominio è un insieme dello spazio tridimensionale $\Re^3$ è per definizione una curva sghemba. Se

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \quad t \in [a,b]$$

allora le equazioni

$$x = f_1(t) \ , \ y = f_2(t) \ , \ z = f_3(t) \qquad t \in [a,b]$$

sono dette equazioni parametriche della curva e la variabile t è detta parametro della curva.

Generalmente le equazioni parametriche di una curva sghemba vengono indicate con

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t) \qquad t \in [a,b]$$

e la corrispondente funzione vettoriale con il vettore

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad t \in [a,b]$$

detto vettore posizione.

Curve equivalenti e cambiamento di parametro

Sia γ una curva specificata dalla funzione vettoriale

$$F = F(t) \qquad t \in [a,b].$$

Sia $t = u(r)$ una funzione a valori reali definita su un intervallo $[c,d]$ con derivata u' sempre diversa da zero e tale che il codominio di u sia $[a,b]$. In altre parole:

$$\forall\ t \in [a,b] \ \exists!\ \tau \in [c,d] : t = u(\tau)$$

Allora la funzione vettoriale definita dall'equazione

$$G(\tau) = F[u(\tau)] \qquad \tau \in [c,d]$$

ha lo stesso grafico di F. Due funzioni vettoriali F e G che si trovano tra loro in questa relazione si dicono equivalenti. Si dice altresì che la funzione $t = u(\tau)$ definisce un cambiamento di parametro. Si osservi che:

1. se $u'(\tau)$ è sempre positiva su $[c,d]$ allora F e G percorrono γ nella stessa direzione;

2. se $u'(\tau)$ è sempre negativa su $[c,d]$ allora F e G percorrono γ in direzioni opposte.

In altre parole il cambiamento di parametro $t = u(\tau)$ conserva l'orientamento nel primo caso $(u'(\tau) > 0)$, e lo inverte nel secondo caso $(u'(\tau) < 0)$.
Poiché lungo una curva sono possibili due orientazioni ne consegue che qualunque parametrizzazione di una curva determina una delle due possibili orientazioni:quella corrispondente alla direzione lungo la quale il parametro è crescente.

Esempio. L'equazione cartesiana del segmento di estremi (a, b) e (c, d) :

$$t = b - \frac{b-a}{d-c}(\tau - c) \qquad \tau \in [c,d]$$

costituisce un esempio di cambiamento di parametro che inverte i verso della curva γ.
Infatti quando τ varia da *c* a *d* $(\tau : c \to d)$ il parametro t varia da *b* ad *a* $(\tau : b \to a)$.

Lunghezza d'arco (ascissa curvilinea)

Sia γ una curva specificata dall'equazione vettoriale

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad t \in [a,b]$$

Se $\mathbf{r}(t)$ ha derivata $\mathbf{v}(t)$ continua e non nulla in $[a,b]$, ovvero se la curva γ è liscia (regolare) allora la lunghezza della curva γ è data da

$$L[\gamma] = \int_a^b \| \mathbf{v}(t) \| dt = \int_a^b \mathbf{v}(t) dt$$

ovvero

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt$$

In particolare la lunghezza di una curva piana di equazione $y = f(x)$ dove *f* è una funzione di classe $C^1([a,b])$, è data da

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Infatti usando *x* come parametro, risulta

$$\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j} \qquad x \in [a,b]$$

Se $s(t)$ indica la lunghezza di quella parte di γ che corrisponde ai valori del parametro in $[a,t]$, dove $a \le t \le b$, allora la funzione

$$s(t) = \int_a^t v(\tau) d\tau$$ detta lunghezza d'arco o ascissa curvilinea, è derivabile e

$$ds = v(t)dt = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt$$ è detto elemento di lunghezza d'arco.

Ne consegue che:

$$L[\gamma]=\int_{\gamma} ds$$

Osservazione

Sia $F=F(t)\quad t\in[a,b]$ una curva regolare a tratti e sia

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$$

una partizione di $[a,b]$ tale che la restrizione di F su $[t_{i-1},t_i]\quad i=1,\ldots,n$, sia un arco di curva regolare. Indichiamo con γ la traiettoria descritta da α su $[a,b]$ e con γ_i quella corrispondente all'intervallo $[t_{i-1},t_i]\quad i=1,\ldots,n$.
Allora

$$\int_{\gamma} ds=\sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i} ds$$

poiché l'integrale (come sarà dimostrato nel paragrafo successivo)

$$\int_{\gamma_i} ds \qquad i=1,2,\ldots,n$$

è indipendente dalla rappresentazione parametrica che descrive γ_i ne consegue che per il calcolo degli integrali precedenti possiamo considerare per ogni γ_i la rappresentazione parametrica più conveniente.
Un modo naturale di parametrizzare una curva liscia γ è quello di considerare come parametro la lunghezza d'arco *s* misurata da qualche punto particolare di γ detto punto iniziale. Più precisamente: supponiamo che una curva regolare sia specificata in funzione di un parametro arbitrario *t* dall'equazione $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)\quad t\in[a,b]$. Supponiamo inoltre che la lunghezza d'arco abbia come punto iniziale $P_0=\mathbf{r}(t_0)\quad t_0\in[a,b]$. Allora se la lunghezza misurata lungo la curva γ da P_0 al punto generico $P=\mathbf{r}(\tau)$, data da

$$s=s(t)=\int_{t_0}^{t}\left\|\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right\|d\tau=\int_{t_0}^{t}v(\tau)\,d\tau$$

può essere calcolata esplicitamente e se l'equazione $s=s(t)$ può essere risolta esplicitamente rispetto a *t*, $t=t(s)$, allora la curva può essere riparametrizzata mediante la lunghezza d'arco sostituendo $t=t(s)$ nella parametrizzazione originale ottenendo

$$\mathbf{r}^*=\mathbf{r}[t(s)]=\mathbf{r}^*(s)$$

dove *s* varia in un intervallo di lunghezza *L* essendo *L* la lunghezza della curva considerata.

Più precisamente $s \in [L_1, L_2]$ dove

$$L_1 = \int_a^{t_0} v(\tau)d\tau \qquad L_2 = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau$$

In particolare se il punto iniziale coincide con il primo estremo dell'intervallo in cui varia *t* cioè se è $t_0 = a$ allora $s \in [0, L]$. Da

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau$$

segue che qualunque sia il parametro risulta

$$\frac{ds}{dt} = v(t)$$

pertanto se il parametro è la lunghezza d'arco *s*, risulta $v(s) = 1$.

In altre parole:
una curva $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}[t(s)]$ parametrizzata in funzione della lunghezza d'arco *s* è percorsa con velocità unitaria. Infatti

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{v(t)} \Rightarrow \left\| \frac{d\mathbf{r}^*}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| \frac{1}{v(t)} = 1$$

Esempi.

Calcolare la lunghezza dell'arco delle seguenti curve:

1. arco di circonferenza:
$$x = a\cos(t), \quad y = a\sin(t) \qquad 0 \le t \le \vartheta$$

2. arco di cicloide:
$$x = a(t - \sin(t)), \quad y = a(1 - \cos(t)) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

3. primo anello dell'elica circolare:
$$x = a\cos(t), \quad y = a\sin(t), \quad z = bt \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

4. dell'asteroide
$$x = a\cos^3(t), \quad y = a\sin^3(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Abbiamo

i)

$$L = \int_0^{\vartheta} a\, d\vartheta = a\,\vartheta$$

da cui: la lunghezza *s* di un arco di circonferenza di raggio ρ con angolo al centro ϑ è dato da $s = \rho\vartheta$

ii)

$$L = \int_0^{2\pi} 2a \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8a$$

dove si è tenuto conto del fatto che $0 \le \frac{t}{2} \le \pi$ quando $0 \le t \le 2\pi$.

iii)

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

iv) essendo

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (x')^2 + (y')^2 = \left(3\sin(t)\cos^2(t)\right)^2 + \left(3a\cos(t)\sin^2(t)\right)^2 = \\ &= 9a^2\sin^2(t)\cos^2(t)\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)\end{aligned}$$

segue

$$L = \int_0^{\pi/2} 3a\sin(t)\cos(t)\, dt = 4\left(\frac{3a}{2}\right) = 6a$$

Per calcolare la lunghezza di una curva γ specificata dall'equazione polare $\rho = \rho(\vartheta),\ \vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2$ osservato che le equazioni parametriche della curva γ rispetto al parametro ϑ sono:

$$x = \rho(\vartheta)\cos(\vartheta) \quad y = \rho(\vartheta)\sin(\vartheta) \qquad \vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2$$

derivando le equazioni precedenti rispetto a ϑ, si ottiene:

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \rho'(\vartheta)\cos\vartheta - \rho(\vartheta)\sin\vartheta$$
$$\frac{dy}{d\vartheta} = \rho'(\vartheta)\sin\vartheta + \rho(\vartheta)\cos\vartheta$$

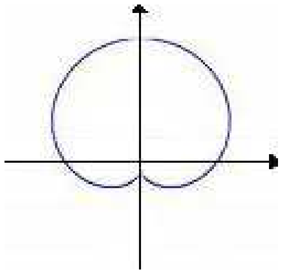
da cui

$$\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2 = \rho^2 + (\rho')^2 \quad \text{dove} \quad \rho = \rho(\vartheta) \quad \text{e} \quad \rho' = \rho'(\vartheta)$$

Quindi

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\vartheta .$$

Esempio



Calcolare la lunghezza della cardioide $\rho = a(1 + \sin\vartheta)$, $\quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$
Essendo $\rho' = a\cos\vartheta$, abbiamo

$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\sin\vartheta}\, d\vartheta = 2\sqrt{2}a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin\vartheta}\, d\vartheta$$

da cui, essendo

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2 + 2\sin\vartheta}\, d\vartheta = 2\sqrt{2}a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin\vartheta}\, d\vartheta$$

Segue che è L = 8a.

Esempio

Riparametrizzare l'arco di cicloide γ

$$x = a(t - \sin t) \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

rispetto al parametro d'arco s con punto iniziale $(0,0)$.

A tale scopo calcoliamo

$$s = s(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau = 2a\int_0^t \sin\frac{\tau}{2}d\tau$$

da cui

$$s = 4a - 4a\cos\frac{t}{2} \quad \text{da cui} \quad \cos\frac{t}{2} = 1 - \frac{s}{4a}$$

Ora riscriviamo l'equazione precedente rispetto a t.

Osservato che $0 \le t \le 2\pi$ implica $0 \le t/2 \le \pi$, abbiamo

$$t = 2ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right) \quad \text{ovviamente} \quad 0 \le ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right) \le \pi$$

Si osservi che da $0 \le s \le 8a$ segue che $-1 \le 1 - \frac{s}{4a} \le 1$.

Essendo

$$\frac{1-\cos t}{2} = \cos^2\frac{t}{2} = \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2$$

da quando precede, si evince

i) $\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1 = 2\left(1 - \frac{s}{4a}\right) - 1$.

ii) $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = 2\left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)^{1/2} \quad \cos\frac{t}{2} = 2\left[1 - \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2\right]^{1/2}\left(1 - \frac{s}{4a}\right)$

quindi

$$x = 2a\,ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right) - 2a\left[1 - \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2\right]^{1/2}\left(1 - \frac{s}{4a}\right)$$

$$y = a\left[1 - 2\left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2 + 1\right] = 2a\left[1 - \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2\right] \qquad 0 \le s \le 8a$$

Oppure da:

$$t = t(s) = 2ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)$$

segue che

$$\sin t = \sin\left[2ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right] = 2\sin\left[ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right]\cos\left[ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{1 - \cos^2\left[ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right]}\left(1 - \frac{s}{4a}\right) = 2\sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2}\left(1 - \frac{s}{4a}\right)$$

$$\cos t = \cos\left[2ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right] = \cos^2\left[ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right] - \sin^2\left[ar\cos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right] =$$

$$= \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2 - \left[1 - \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2\right] = 2\left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2 - 1$$

Quindi

$$x = 2a\, ar\cos\left(1-\frac{s}{4a}\right) - 2a\left[1-\left(1-\frac{s}{4a}\right)^2\right]^{1/2}\left(1-\frac{s}{4a}\right)$$

$$y = a\left[1-2\left(1-\frac{s}{4a}\right)^2+1\right] = 2a\left[1-\left(1-\frac{s}{4a}\right)^2\right] \qquad 0 \le s \le 8a$$