EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Le equazioni differenziali appartengono ad una classe di equazioni in cui l' incognita è una funzione (scalare o vettoriale). Tali equazioni sono dette equazioni funzionali. Questi tipi di equazioni si incontrano spesso in fisica, in chimica, in biologia, in economia ed in altre scienze e costituiscono un "modello matematico" di un determinato problema .

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

Definizione 1.

Un' equazione differenziale ordinaria (e. d. o.) del primo ordine è un' equazione che stabilisce una relazione tra una variabile indipendente t, una funzione incognita $x = x(t)$ e la sua derivata $x'(t)$, in altre parole è una relazione del tipo

(1) $$F(t, x, x') = 0.$$

In particolare un' equazione differenziale del tipo

(2) $$x' = f(t, x)$$

è detta **equazione differenziale del primo ordine in forma normale.**

Definizione 2.

Si chiama soluzione o integrale di una e. d. o. una funzione $x = x(t)$ che, sostituita nella equazione differenziale, la trasforma in una identità.

La condizione che la funzione $x = x(t)$ assuma il valore x_0 in t_0 è detta condizione iniziale. Una funzione $x = h(t, c)$ che dipende da un parametro $c \in \mathbb{R}$ e che verifica le condizioni seguenti:

i) soddisfa l' e. d. qualunque sia il valore assunto dalla costante c;

ii) qualunque sia la condizione iniziale vi è un solo valore di c tale che la funzione $h(t, c)$ soddisfi la condizione iniziale;

è per definizione **la soluzione generale dell' e. d.**.

Cercando la soluzione di un' equazione differenziale, veniamo spesso a trovarci di fronte ad una relazione del tipo $H(t, x, c) = 0$. Tuttavia, a partire dalla relazione precedente, non è sempre possibile esprimere x tramite funzioni elementari; in tal caso, l' equazione

$$H(t, x, c) = 0$$

rappresenta la soluzione generale in forma implicita ed è detta **integrale generale dell' e. d.**

Ogni funzione che si ottiene dalla soluzione generale assegnando un valore a c è detta **soluzione particolare.**

Da un punto di vista geometrico l' integrale generale rappresenta una famiglia di curve piane che dipendono dal parametro c. Queste curve si chiamano curve integrali dell' e. d. data e ogni curva di questa famiglia corrisponde ad un integrale particolare.

Il problema di determinare la soluzione dell' e, d. o. (in forma normale)

$$x' = f(t,x)$$

che soddisfa la condizione iniziale

$$x(t_0) = x_0$$

è detto **problema di Cauchy.**

Supponiamo che f(t,x) sia una funzione continua di (t,x) nel rettangolo

$$R = \{ (t,x) : | t - t_0 | \leq a;\ | x - x_0 | \leq b \}$$

Osserviamo che se $x = x(t)$ è una soluzione del problema di Cauchy , definita in un intorno di t_0

$$I = \{ t : | t - t_0 | \leq \delta \leq a \}$$

dal teorema di continuità sulle funzioni composte segue che $F(t) = f(t,x(t))$ è una funzione continua e quindi integrabile su I. Inoltre è

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad t \in I.$$

Così, ogni soluzione del problema di Cauchy è soluzione dell' equazione integrale (di Volterra) precedente.

Viceversa, se $x = x(t)$ è una soluzione continua dell' equazione integrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad t \in I$$

allora essendo f(t,x(t)) continua su I, la funzione integrale è derivabile con

$$x'(t) = f(t,x)$$

inoltre è $x(t_0) = x_0$. In altre parole sussiste la seguente

Proposizione 1.

Una funzione $x = x(t)$ con $t \in I$, è soluzione del problema di Cauchy

$$x'(t) = f(t,x)\ ;\ x(t_0) = x_0$$

se e solo se è soluzione dell' equazione integrale (di Volterra)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad t \in I.$$

Sussiste il seguente

Teorema 1(di esistenza ed unicità).

Se f(t,x) è una funzione continua di (t,x) nel rettangolo

$$R = \{ (t,x) : | t - t_0 | \leq a, | x - x_0 | \leq b \}$$

e se esiste una costante $L > 0$ tale che

(4) $$| f(t,x) - f(t,y) | \leq L | x - y | \quad \forall\ (t,x) \text{ e } (t,y) \in R$$

allora, esiste un' unica soluzione $x = x(t)$ del problema di Cauchy

$$x'(t) = f(t,x)\ ;\ x(t_0) = x_0$$

definita nell' intervallo

$$|t - t_0| \le d = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \quad \text{dove} \quad M = \max\{|f(t,x)| : (t,x) \in R\}.$$

Inoltre x(t) è il limite uniforme della successione

$$x_0(t) = x_0, \quad x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds \quad |t - t_0| \le \delta,\ n \ge 1.$$

Osservazioni.

1. La condizione (4) è nota come condizione di Lipschitz di f(t,x) rispetto ad x.
In particolare la (4) è verificata se la derivata $\partial f/\partial x$ esiste ed è limitata su R.
Infatti applicando il teorema del valor medio a f(t,x) nei punti (t,x) e (t,y) $\in$ R risulta

$$f(t,x) - f(t,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi)\,(x - y)$$

dove ξ è compreso tra x ed y. Da cui, se poniamo $L = \sup |\delta f/\delta x|$ in R, segue la (4).

2. La successione delle approssimazioni successive

$$x_0(t) = x_0, \quad x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds \quad |t - t_0| \le \delta,\ n \ge 1.$$

è una successione di funzioni continue il cui grafico è contenuto in R.
Infatti la funzione

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds \quad t \in [t_0 - a, t_0 + a]$$

è continua, inoltre per $0 < \delta \le a$, risulta

$$|x_1(t) - x_0| \le \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, x_0)|\, ds\right| \le M|t - t_0| \le M\delta.$$

Pertanto se supponiamo $0 < \delta \le b/M$, in particolare $\delta = \min(a, b/M)$ è

$$|x_1(t) - x_0| \le b \quad \forall\, t \in J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

In altre parole, per $\delta = \min(a, b/M)$, risulta

$$(t, x_1(t)) \in R \quad \forall\, t \in J$$

e quindi esiste

$$f((t, x_1(t)) \quad \forall\, t \in J$$

Procedendo come sopra si deduce che la funzione

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\, ds$$

è continua e che

$$|x_2(t) - x_0| \le b \quad \forall\, t \in J \quad \text{ovvero} \quad (t, x_2(t)) \in R \quad \forall\, t \in J$$

e quindi esiste

$$f((t, x_2(t)) \qquad \forall\, t \in J.$$

Infine per induzione su n si evince l' asserto:

$$|x_n(t) - x_0| \le b \quad \forall\, t \in J \quad \text{ovvero} \quad (t, x_n(t)) \in R \quad \forall\, t \in J \text{ e } \forall\, n \ge 1.$$

Dimostrazione (del teorema 1).

Per dimostrare che la successione

$$x_0(t) = x_0, \quad x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds \quad |t - t_0| \le \delta, n \ge 1$$

converge uniformemente in J, scriviamo ogni termine come somma telescopica:

$$x_1(t) = x_0 + (x_1(t) - x_0)$$
$$x_2(t) = x_0 + (x_1(t) - x_0) + (x_2(t) - x_1(t))$$

....

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} [x_{k+1}(t) - x_k(t)]$$

....

e verifichimo che la serie

$$\sum_{k=0}^{n-1} [x_{k+1}(t) - x_k(t)]$$

converge uniformrmente su J.

A tale scopo non è difficile verificare che per induzione risulta

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \le \frac{M}{L} L^{k+1} \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \le \frac{M}{L} \frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Poiché la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!}$$

converge, ne consegue (criterio di Weierstrass) che la serie di funzioni continue su J

$$\sum_{k=0}^{n-1} [x_{k+1}(t) - x_k(t)]$$

converge uniformemente su J ad una funzione continua x(t).

Per completare la dimostrazione dobbiamo dimostrare che

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

A tale scopo e sufficiente verificare che

$$x_n(t) \underset{u}{\to} x(t) \Rightarrow f(t, x_n(t)) \underset{u}{\to} f(t, x(t)) \qquad \text{su J.}$$

Essendo f uniformemente continua su R, in corrispondenza di $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |f(t,x) - f(t,y)| < \varepsilon \quad \forall\, t \in J,$$

d' altra parte in corrispondenza di η esiste $N > 0$ tale che

$$|x_n(t) - x(t)| < \eta \quad \forall\, t \in J \ \text{ e } \ n > N$$

quindi

$$|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| < \varepsilon \quad \forall\, t \in J \ \text{ e } \ n > N.$$

Per dimostrare che

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds \quad |t - t_0| \le d$$

è l' unica soluzione del problema di Cauchy

$$x'(t) = f(t,x) \; ; \; x(t_0) = x_0$$

procediamo come segue. Sia $z = z(t)$ una funzione continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] = J$ tale che

$$| z(t) - x_0 | \leq b \quad \text{per ogni t appartenente a J}$$

e

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, z(s)]\, ds.$$

Ovviamente è $z(t_0) = x_0$. Essendo per ogni t appartenente a J

$$| z(t) - x_0 | \leq b$$

$$| z(t) - x_1(t) | \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f[s, z(s)] - f[s, x_0]| \, ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} | z(s) - x_0 | \, ds \right| \leq bL | t - t_0 |$$

e per induzione su n

$$| z(t) - x_n(t) | \leq bL^n \frac{| t - t_0 |^n}{n!} \leq b \frac{(L\delta)^n}{n!}$$

segue che

$$\lim_{n \to \infty} | z(t) - x_n(t) | = 0 \quad \text{ovvero} \quad \lim_{n \to \infty} x_n(t) = z(t)$$

da cui, per l' unicità del limite, risulta $z(t) = x(t)$ per ogni t in $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Prof. FAICANO
€ 0,50

Equazioni differenziali lineari del primo ordine.

Un' equazione differenziale lineare del primo ordine è un' e. d. che è lineare rispetto alla funzione incognita $x = x(t)$ e alla sua derivata $x' = x'(t)$. La forma più generale è

(5) $$a(t)\, x' + b(t)\, x = g(t)$$

dove $a(t)$, $b(t)$ e $g(t)$ sono funzioni assegnate e definite su un intervallo $I = (\alpha,\beta)$.

Se $g(t) = 0$ su I l' equazione (5) è detta omogenea altrimenti è detta non omogenea.

Inoltre se su I è $a(t) \neq 0$, l' equazione (5) diventa

(6) $$x' + p(t)\, x = q(t)$$

dove $p(t) = b(t)/a(t)$ e $q(t) = g(t)/a(t)$.

Teorema 2.

Se le funzioni $p(t)$ e $q(t)$ e quindi $a(t)$, $b(t)$ e $g(t)$ sono continue in $[a,b] \subset I = (\alpha,\beta)$, allora il problema di Cauchy

$$x' = -\,p(t)\, x + q(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{dove } t_0 \in [a, b] \text{ e } x_0 \in \mathbb{R}$$

ha un' unica soluzione.

Dimostrazione.

La funzione $f(t,x) = -\,p(t)\, x + q(t)$ soddisfa le ipotesi del teorema 1 in $R = [a,b] \times \mathbb{R}$.

Infatti è ivi continua inoltre è

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq \max\left(|\, p(t) \,| : \ t \in [a,b] \right).$$

Dal teorema 2 segue che in particolare il problema di Cauchy

$$x' = -\,p(t)\, x, \quad x(t_0) = 0$$

ha per soluzione la soluzione banale $x = x(t) = 0 \quad \forall\, t \in (\alpha,\beta)$.

In altre parole :

ogni soluzione dell' e. d. lineare omogenea, diversa da quella banale, non si annulla in I.

Premesso ciò per determinare l' integrale generale dell' e. d. lineare ed omogenea

$$x' = -\,p(t)\, x$$

procediamo come segue.

Dividiamo ambo i membri dell' equazione per x, si ottiene

$$\frac{x'}{x} = -\,p(t)$$

da cui

$$\ln |\, x(t) \,| = -\int p(t)\, dt + c_1 \, .$$

Ne consegue che

$$\left| x(t) \exp \int p(t)\, dt \right| = e^{c_1} .$$

segue che l' integrale generale dell' e. d. $x' + p(t)\,x = 0$ è

$$x(t) = c\exp\left(-\int p(t)\,dt\right).$$

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$x' = -\,p(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

si può procedere in due modi

i) calcolata la soluzione generale $x = h(t,c)$, per determinare la soluzione corrispondente al dato iniziale assegnato, si determina il corrispondente valore di c risolvendo l' equazione $x(t_0) = h(t_0,c)$;

ii) risolvendo l' equazione

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)}\,ds = -\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds$$

si ottiene è la soluzione cercata

$$x(t) = x(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right).$$

<u>Per determinare l' integrale generale dell' e. d. lineare non omogenea</u>

$$x' + p(t)\,x = q(t)$$

<u>consideriamo l' e.d. equivalente</u>

$$\mu x' + \mu p x = \mu q \quad \text{dove } \mu = \mu(t),\ p = p(t) \text{ e } q = q(t).$$

Osservato che

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t)\,dt\right) \Rightarrow \mu'(t) = p(t)$$

segue che scegliendo

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t)\,dt\right)$$

l' e.d. assegnata è equivalente all' e. d.

$$\mu x' + \mu' x = \mu q \quad \text{ovvero} \quad (\mu x)' = \mu q$$

da cui

$$x(t) = \exp\left(-\int p(t)\,dt\right)\left[\int m(t)\,q(t)\,dt + c\right]$$

è l' integrale generale richiesto.

Si osservi che dalla relazione precedente, ponendo $q(t) = 0$, si ottiene la soluzione generale dell' e. d. lineare omogenea. Pertanto per cercare la soluzione dell' e. d. $x' + p(t)x = 0$ possiamo procedere anche come sopra.

Non è difficile verificare che

$$x(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right)\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)q(s)ds + x(t_0)\right]$$

$$x' + p(t)x = q(t) \ ; \ x(t_0) = x_0 \, .$$

Se poniamo

$$A = \frac{d}{dt} + p(t)I \, , \quad \text{dove } I \text{ è l' operatore identico}$$

$$A : C^1(\alpha,\beta) \rightarrow C(\alpha,\beta)$$

il problema di determinare l' integrale generale dell' e. d.

$$x' + p(t)x = 0$$

è equivalente a quello di determinare il nucleo N(A) dell' operatore (ovviamente) lineare A; il problema di determinare la soluzione generale dell' e. d.

$$x' + p(t)x = q(t)$$

è equivalente a quello di determinare la controimmagine di $q \in C(\alpha,\beta)$.

Infine si osservi che

i) N(A) è uno spazio vettoriale unidimensionale;

ii) l' integrale generale dell' e. d. lineare non omogenea

$$x(t) = \exp\left(- \int p(t)dt\right)\left[\int \mu(t)q(t)dt + c\right]$$

coerentemente con un noto teorema di algebra lineare, è dato dalla somma della soluzione generalle dell' e. d. omogenea ($Ax = 0$) e di una soluzione particolare dell' e. d. non omogenea ($Ax = q$).

Teorema (di esistenza ed unicità).

Siano $p = p(t)$ e $q = q(t)$ due funzioni continue in (α,β) e sia $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Allora esiste una ed una sola funzione $y = y(t)$ che soddisfa l' e.d.

(1) $$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

e la condizione iniziale

(2) $$y(t_0) = y_0 \quad e \quad y'(t_0) = y'_0 \ .$$

In particolare l' unica soluzione che soddisfa l' e.d. (1) con la condizione iniziale

$$y(t_0) = y'(t_0) = 0$$

è la funzione identicamente nulla. Ne consegue che

$$L[y] = 0 \ \text{ e } \ y(t_0) = y'(t_0) = 0 \ \text{ per qualche } t_0 \in (\alpha,\beta) \ \Rightarrow \ y(t) = 0 \quad \forall\, t \in (\alpha,\beta).$$

Osservato che l' operatore differenziale

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y$$

definito sullo spazio vettoriale delle funzioni di classe $C^2(\alpha,\beta)$ è lineare, in quanto è

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \ \text{ e } \ L[ky] = kL[y] \quad \forall\, y_1, y_2 \text{ e } y \in C^2(\alpha,\beta) \ \text{ e } \forall\, k \in \mathbb{R}$$

segue che il problema di determinare le soluzioni dell' e.d.

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

consiste nel problema di determinare il nucleo N(L) dell' operatore L.

Il nostro scopo è quello di dimostrare che N(L) è uno spazio vettoriale bidimensionale. A tale scopo premettiamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.

Siano y_1 e y_2 due funzioni definite in un intervallo I ed ivi non identicamente nulle. Si dice che y_1 e y_2 sono l.d. se esistono due costanti c_1 e $c_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ tali che

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0 \quad \forall\, t \in I\ .$$

Diversamente si dice che y_1 e y_2 sono l.i.. In altre parole se y_1 e y_2 sono l.i. allora

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0 \quad \forall\, t \in I \ \Leftrightarrow \ c_1 = c_2 = 0.$$

Si osservi che y_1 e y_2 sono l. d. se e solo se esiste una costante $c \neq 0$ tale che

$$y_1 = cy_2 \ \text{ oppure } y_1 = cy_2 \quad \forall\, t \in I.$$

Definizione 2.

Siano y_1 e y_2 due funzioni definite e derivabili in un intervallo $I = (\alpha,\beta)$. Il Wronskiano di y_1 e y_2 si indica con $W(t) = W[y_1,y_2](t)$ ed è definito come segue

$$W(t) = W[y_1,y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t).$$

Dalla definizione 2 segue il seguente

Teorema.

Se y_1 e y_2 sono l.d. ovvero $y_1 = cy_2$ in I e se y_1 e $y_2 \in C^2(I)$, allora è

Teorema.

Siano y_1 e y_2 due soluzioni non identicamente nulle dell' e. d.

$L[y](t) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad t \in (\alpha,\beta),\ p \text{ e } q \in C(\alpha,\beta).$

i) $W' + p(t)W = 0 \quad t \in (\alpha,\beta)$;

ii) $W(t) = 0 \quad \forall\, t \in (\alpha,\beta)$ oppure $W(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (\alpha,\beta)$;

iii) $W(t) = 0$ in $t \in (\alpha,\beta) \Rightarrow y_1$ e y_2 sono l. d..

Dimostrazione.

i) E'

$$W'(t) = \left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

Da cui tenuto presente che per ipotesi è

$$y_1'' = -p(t)y_1' - q(t)y_1 \quad \text{e} \quad y_2'' = -p(t)y_2' - q(t)y_2$$

si deduce che $W' = -p(t)W$ ovvero l' asserto.

ii) Essendo per la i)

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right)$$

si deduce che se in qualche punto $t_0 \in (\alpha,\beta)$ è $W(t_0) = 0$ allora è $W(t) = 0\ \forall\, t \in (\alpha,\beta)$, se in qualche punto $t_0 \in (\alpha,\beta)$ è $W(t_0) \neq 0$ allora è $W(t) \neq 0\ \forall\, t \in (\alpha,\beta)$.

iii) Se è $W(t) = 0$, segue che qualunque sia $t_0 \in (\alpha,\beta)$ il sistema omogeneo

$$y(t_0) = c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = 0$$
$$y'(t_0) = c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = 0$$

ha una soluzione $c_1 = a$ e $c_2 = b$ diversa da quella banale. Sia

$$y = h(t) = ay_1(t) + b\,y_2(t) \quad t \in (\alpha,\beta).$$

Essendo $y = y(t) = 0$ e $y = h(t)$ due soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad t \in (\alpha,\beta),\ p \text{ e } q \in C(\alpha,\beta)$$
$$y(t_0) = 0 \qquad y'(t_0) = 0$$

dal teorema di esistenza ed unicità segue che

$$h(t) = ay_1(t) + by_2(t) = 0 \quad t \in (\alpha,\beta)$$

è l' unica soluzione del problema di Cauchy precedente. Infine da $|a| + |b| \neq 0$ e da

$$y_1 \text{ e } y_2 \text{ l. i. e } ay_1(t) + by_2(t) = 0 \quad \forall\, t \in (\alpha,\beta) \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

si deduce che y_1 e y_2 sono l. d..

Corollario.

Due soluzioni y_1 e y_2 dell' e. d.

$$L[y](t) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad t \in (\alpha,\beta),\ p \text{ e } q \in C(\alpha,\beta).$$

sono l. d. se e solo se $W(t) = 0$ in (α,β).

Equivalentemente

Due soluzioni y_1 e y_2 dell' e. d.

$$L[y](t) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad t \in (\alpha,\beta),\ p \text{ e } q \in C(\alpha,\beta)$$

Teorema (fondamentale).
Siano y_1 e y_2 due soluzioni l. i. dell' e. d.

$$L[y](t) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad t \in (\alpha,\beta),\ p \text{ e } q \in C(\alpha,\beta). \qquad (3)$$

Allora $\forall\, y \in N(L)$ sono univocamente determinate due costanti c_1 e c_2 tali che

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

In altre parole due soluzioni l. i. dell' e. d. (3) costituiscono una base per N(L).

Dimostrazione.

Sia $y \in N(L)$ cioè supponiamo che $L[y] = 0$. Sia $t_0 \in (\alpha,\beta)$ e poniamo

$$y_0 = y(t_0) \text{ e } y'_1(t_0) = y'(t_0).$$

Premesso ciò osserviamo che il sistema sistema lineare non omogeneo

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$
$$c_1 y'_1(t_0) + c_2 y'_2(t_0) = y'_0$$

ha un unica soluzione c_1 e c_2 in quanto il corrispondente determinante dei cefficienti $W(t_0)$ è per ipotesi diverso da zero. Sia

$$\Phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

dove c_1 e c_2 è la soluzione del sistema precedente. Essendo

$$L[\Phi](t) = 0,\ \Phi(t_0) = y_0 \text{ e } \Phi'(t_0) = y'_0 \quad \text{e} \quad L[y](t) = 0,\ y_0 = y(t_0) \text{ e } y'_0 = y'(t_0)$$

segue che $y(t)$ e $\Phi(t)$ soddisfano la stessa equazione differenziale e le stesse condizioni iniziali, quindi per il teorema di esistenza ed unicità è

$$\Phi(t) = y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\ .$$

Poiché ogni soluzione dell' equazione $L[y] = 0$ si può esprimere in modo univoco come combinazione liniare di due soluzioni l. i. ne consegue che la dimensione di N(L) è 2.

Equazioni differenziali lineari non omogenee.

Incominciamo ad esaminare il caso (più semplice) in cui f sia una funzione costante su J :

$$f(t) = k \quad \forall\, t \in J.$$

Sia

(1) $$a\,y'' + b\,y' + c\,y = k.$$

E' evidente che

i) nel caso in cui è $c \neq 0$

$$y = \frac{k}{c}$$

è una soluzione dell' equazione differenziale (1).

ii) nel caso in cui è $c = 0$ e $b \neq 0$

$$y = \frac{k}{b}\,t$$

è una soluzione dell' equazione differenziale (1).

iii) nel caso in cui è $c = 0$, $b = 0$

$$y = \frac{k}{2a}\,t^2$$

è una soluzione dell' equazione differenziale (1). In questo caso per determinare la soluzione generale dell' e. d. è più conveviente integrare due volte l' equazione

$$a\,y'' = k.$$

Consideriamo il caso in cui

$$f(t) = k\,e^{\alpha t} \quad \forall\, t \in J \text{ e } \forall\, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

In questo caso non è difficile verificare che la sostituzione $y = v(t)\,e^{\alpha t}$ trasforma l' e. d.

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = k\,e^{\alpha t}$$

nell' e. d.

(2) $$a\,v'' + (2a\alpha + b)\,v' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)\,v = k.$$

Pertanto $y = v(t)\,e^{\alpha t}$ è una soluzione particolare dell' e. d.

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = k\,e^{\alpha t}$$

se $v = v(t)$ è una soluzione particolare dell' e. d.

$$a\,v'' + (2a\alpha + b)\,v' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)\,v = k.$$

Si osservi, che

$(a\alpha^2 + b\alpha + c)$ è il valore che il polinomio caratteristico $p(k) = ak^2 + bk + c$ per $k = \alpha$,

$(2a\alpha + b)$ è il valore che $p'(k)$ assume per $k = \alpha$.

Ora consideriamo il seguente

Problema 1.

Sia

$$\psi(t) = P_1(t) = A_0 + A_1 t.$$

Soluzione.

Sostituendo $\psi(t)$ nell' e. d. (3) si ottiene

$$cA_0 + bA_1 + cA_1 t = a_0 + a_1 t.$$

Supponiamo $c \neq 0$. In questo caso, tenuto presente il principio di identità dei polinomi, si deduce che la relazione precedente è vera se

$$cA_1 = a_1 \quad e \quad cA_0 + bA_1 = a_0.$$

Quindi nel caso in cui è $c \neq 0$, la funzione

$$\psi(t) = P_1(t) = A_0 + A_1 t$$

dove A_0 e A_1 sono soluzioni del sistema lineare precedente, è una soluzione particolare dell' e. d. (3).

Nel caso in cui è $c = 0$, per ovviare la relazione assurda :

polinomio di grado zero = polinomio di primo grado

è naturale verificare se

$$\psi(t) = tP_1(t) = A_0 t + A_1 t^2$$

è una soluzione particolare dell' e. d. (3). Sostituendo $\psi(t)$ nell' e. d. (3) si ottiene

$$2aA_1 + bA_0 + 2bA_1 t = a_0 + a_1 t.$$

Supponiamo $b \neq 0$. In questo caso, tenuto presente il principio di identità dei polinomi, si deduce che la relazione precedente è vera se

$$2bA_1 = a_1 \quad e \quad 2aA_1 + bA_0 = a_0.$$

Quindi nel caso in cui è $c = 0$ e $b \neq 0$, la funzione

$$\psi(t) = t\,P_1(t) = A_0 t + A_1 t^2$$

dove A_0 e A_1 sono soluzioni del sistema lineare precedente è una soluzione particolare dell' e. d. (3).

Se è $c = 0$ e $b = 0$, procedendo come prima si deduce che

$$\psi(t) = t^2 P_1(t) = A_0 t^2 + A_1 t^3$$

è una soluzione particolare dell' e.d. (3).

Riassumendo

Assegnata l' e.d.

$$L[y] = ay'' + by' + cy = p_1(t) = a_0 + a_1 t$$

esiste un polinomio

$$P_1(t) = A_0 + A_1 t$$

tale che la funzione

$$\psi(t) = \begin{matrix} P_1(t) & \text{se } c \neq 0 \\ t\,P_1(t) & \text{se } c = 0 \text{ e } b \neq 0 \\ t^2\,P_1(t) & \text{se } c = b = 0 \end{matrix}$$

è una soluzione particolare dell' e.d.

Nota bene: i coefficienti di $P_n(t)$ si ottegono sostituendo $P_n(t)$ nell' e.d. $L[v] = p_n(t)$.
Analogamente si dimostra la

Proposizione 3.
Assegnata l' e.d.

$$L[y] = ay'' + by' + cy = p_n(t)\, e^{i\omega t} = (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n)\, e^{i\omega t} \quad \omega \in \mathbb{R}$$

esiste un polinomio

$$P_n(t) = A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n$$

tale che la funzione

$$\psi(t) = \begin{cases} P_n(t) e^{i\omega t} & \text{se } a(i\omega)^2 + bi\omega + c \neq 0 \\ t\, P_n(t) e^{i\omega t} & \text{se } a(i\omega)^2 + bi\omega + c = 0 \end{cases}$$

è una soluzione particolare dell' e.d.

$$L[y] = p_n(t)\, e^{i\omega t}.$$

I coefficienti di $P_n(t)$ si ottegono sostituendo $P_n(t)$ nell' e.d. $L[v] = p_n(t)$ ottenuta sostituendo

$$y(t) = v(t)\, e^{i\omega t}$$

nell' e. e. data. Inltre, la proposizione 3 resta valida se si sostituisce $i\omega$ con $\omega \in \mathbb{C}$.

Osservato che se $\psi(t) = u(t) + iv(t)$ è una soluzione dell' e.d.

$$L[y] = h(t) + ik(t)$$

risulta

$$L[u] = L[\mathrm{Re}\,(\psi)](t) = h(t) \quad \text{e} \quad L[v] = L[\mathrm{Im}\,(\psi)](t) = k(t)$$

si deduce che se $\psi(t)$ è una soluzione dell' e.d.

$$L[y] = p_n(t)\, e^{i\omega t} = p_n(t)(\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad \text{con } \omega \in \mathbb{R},$$

allora

Re (ψ) è una soluzione particolare dell' e.d. $L[y] = p_n(t) \cos \omega t$,

Im (ψ) è una soluzione particolare dell' e.d. $L[y] = p_n(t) \sin \omega t$.

In altre parole, il calcolo di una soluzione particolare dell' e.d.

$$L[y] = p_n(t) \cos \omega t \quad \text{oppure} \quad L[y] = p_n(t) \sin \omega t$$

è ricondotto al calcolo di una soluzione particolare dell' e.d.

$$L[y] = p_n(t)\, e^{i\omega t}.$$

Analogamente il calcolo di una soluzione particolare dell' e.d.

$$L[y] = p_n(t)\, e^{\alpha t} \cos \omega t \quad \text{oppure} \quad L[y] = p_n(t)\, e^{\alpha t} \sin \omega t \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

è ricondotto al calcolo di una soluzione particolare dell' e.d.

$$L[y] = p_n(t)\, e^{\alpha t} e^{i\omega t} = p_n(t)\, e^{(\alpha + i\omega)t}.$$