UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTA' di INGEGNERIA

DIPARTIMENTO di SCIENZE MATEMATICHE

ANALISI II – CALCOLO DIFFERENZIALE

DERIVATE PARZIALI

1. DEFINIZIONE

Le derivate parziali prime di una funzione $f(x,y)$ rispetto alle variabili x e y sono le funzioni $D_1 f(x,y)$ e $D_2 f(x,y)$ date da

$$D_1 f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$D_2 f(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

a condizione che tali limiti esistano.

Si osservi che $D_1 f(x,y)$ è proprio la derivata prima di $f(x,y)$ considerata come funzione solo di x, interpretando y come un parametro costante.
In modo analogo la funzione $D_2 f(x,y)$ è la derivata prima di $f(x,y)$ considerata come funzione solo di y, cioè con x tenuto fisso.

Gli indici "1" e "2" usati per la notazione delle derivate parziali specificano la "prima" variabile e la "seconda" variabile di f.

La derivata parziale $D_1 f(a,b)$ misura la rapidità di variazione di $f(x,y)$ rispetto a x nel punto (a,b), mentre y è mantenuto fisso uguale a b. In termini grafici la superficie $z = f(x,y)$ interseca il piano verticale $y = b$ lungo una curva. Se prendiamo come assi coordinati del piano $y = b$ la retta orizzontale e la retta verticale passanti per il punto (0, b, 0), allora l'equazione della curva è $z = f(x,b)$ e la sua pendenza in $x = a$ è $D_1 f(a,b)$. (vedi figura 1)
Analogamente $D_2 f(a,b)$ rappresenta la rapidità di variazione di f rispetto a y in $y = b$ nel punto *(a,b)* mentre x è mantenuto costante uguale ad a. La superficie $z = f(x,y)$ interseca il piano verticale $x = a$ lungo una curva $z = f(a,y)$ la cui pendenza in $y = b$ è $D_2 f(a,b)$. (vedi figura 1)

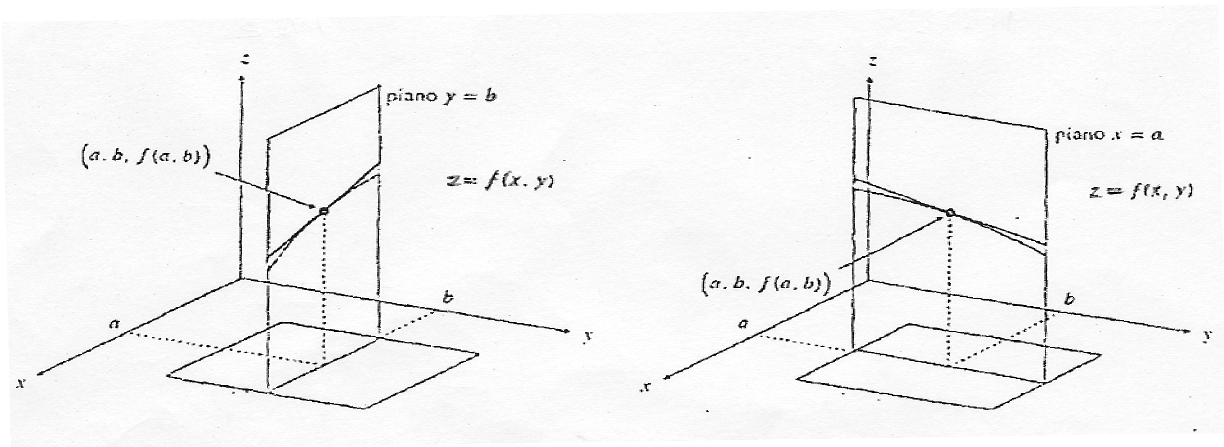


Figura 1

Notazioni delle derivate parziali prime

Per indicare le derivate parziali prime di $z = f(x, y)$ si possono usare varie notazioni:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = D_1 f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = D_2 f(x, y)$$

Il simbolo "$\partial z/\partial x$" si legge "derivata parziale di *z* rispetto a *x*."

I valori delle derivate parziali in un punto particolare (*a, b*) sono indicati in modo simile:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right)\right|_{(a,b)} = f_x(a, b) = D_1 f(a, b)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)\right|_{(a,b)} = f_y(a, b) = D_2 f(a, b)$$

Tutte le regole standard di derivazione delle somme, prodotti, reciproci e quozienti di funzioni di una variabile continuano a valere per le derivate parziali.

Esempio 1.1
Se:

$$z = x^3 y^2 + \ln(x^2 + y^2) + x^2 \sin y$$

Allora :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + \frac{2x}{x^2 + y^2} + 2x \sin y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + \frac{2y}{x^2 + y^2} + x^2 \cos y$$

Esempio 1.2
Determinare $\partial z/\partial x$ **e** $\partial z/\partial y$ **dove** $z = x^4 \sin(xy^3)$**.**

Svolgimento:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^4 \sin(xy^3)] = x^4 \frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy^3)] + \sin(xy^3)\frac{\partial}{\partial x}(x^4) = x^4 y^3 \cos(xy^3) + 4x^3 \sin(xy^3);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^4 \sin(xy^3)] = x^4 \frac{\partial}{\partial y}[\sin(xy^3)] + \sin(xy^3)\frac{\partial}{\partial y}(x^4) =$$
$$x^4 3xy^2 \cos(xy^3) + \sin(xy^3)\cdot 0 = 3x^5 y^2 \cos(xy^3).$$

Esempio 1.3
Supponiamo che un punto Q **si muova lungo l'intersezione della sfera** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ **con il piano** $x = 2$**. A che velocità sta variando** z **rispetto a** y **quando il punto si trova nella posizione** P(2,1,2)**?**

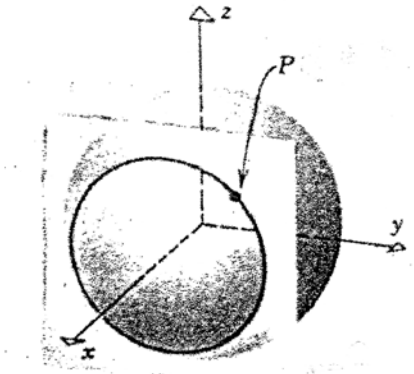


Figura 2

Svolgimento:

Dato che la coordinata z del punto P(2,1,2) è positiva, questo punto giace sulla semisfera superiore:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ ,$$

e dunque per ogni valore fissato di *x*, la rapidità di variazione di *z* rispetto a *y* sulla semisfera superiore è:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[(9 - x^2 - y^2)^{1/2}] = -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

In particolare, se *x* = 2 (vedi figura 2), allora dall'equazione appena trovata segue che la rapidità di variazione di *z* rispetto a *y* nel punto *P* è:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = -1/2.$$

Il successivo esempio mostra che l'esistenza delle derivate parziali non implica la continuità.

Esempio 1.4

La funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

è discontinua in $(0,0)$, ma ha derivate parziali in $(0,0)$; queste derivate sono $f_x(0,0)=0$ e $f_y(0,0)=0$. La discontinuità è nota; i valori delle derivate parziali nel punto $(0,0)$ si ottengono utilizzando la definizione ed osservando che

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0, \qquad \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

2. DERIVATE PARZIALI DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

Dal momento che le derivate parziali $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ sono funzioni delle variabili *x* e *y*, ognuna di esse può avere derivate parziali. Ciò dà origine a quattro possibili **derivate parziali seconde** di f, che sono così definite:

- derivate parziali seconde **pure**, rispetto a *x* o a *y*,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{xx}(x,y) = D_{11}f(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{yy}(x,y) = D_{22}f(x,y);$$

- derivate parziali seconde **miste**, rispetto a *x* e *y*,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{yx}(x,y) = D_{21}f(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{xy}(x,y) = D_{12}f(x,y);$$

Si osservi che $f_{yx} = D_{21}f$ indica che si deve derivare prima rispetto ad *y* oppure rispetto alla seconda variabile e dopo rispetto a *x* oppure rispetto alla prima variabile. $f_{xy} = D_{12}f$ indica l'ordine di derivazione opposto.

Analogamente, se $w = f(x,y,z)$, allora:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} = f_{yyx}(x,y,z) = D_{221}\, f(x,y,z)$$

Esempio 2.1
Tenuto conto dell'esempio 1.1 si ha:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy} = 6x^2 y - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} + 2x\cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx} = 6x^2 y - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} + 2x\cos y;$$

Nell'esempio precedente si constata che le due derivate parziali miste rispetto alle stesse variabili, ma in ordine diverso, sono uguali. Questo risultato non è fortuito, ma si verifica tutte le volte che le derivate parziali implicate sono *continue*. Il teorema seguente enuncia in modo preciso questa importante proprietà, più precisamente fornisce una condizione sufficiente per l'uguaglianza delle derivate parziali miste.

TEOREMA 2.1

Sia *f* un campo scalare tale che le derivate parziali

$$D_1 f,\ D_2 f,\ D_{12} f,\ D_{21} f$$

esistono in un aperto Ω del piano *xy*. Se (*a*, *b*) è un punto di Ω in cui $D_{12} f$ e $D_{21} f$ sono continue allora

$$D_{12} f(a,b) = D_{21} f(a,b).$$

L'esempio che segue mostra che se una funzione $f(x,y)$ a valori reali ha le due derivate parziali miste

$$D_{12} f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad D_{21} f = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

queste non sono necessariamente uguali.

Esempio 2.2
Per la funzione

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{e} \quad f(0,0) = 0$$

risulta $D_{21} f(0,0) = 1$ e $D_{12} f(0,0) = -1$. Infatti è

$$D_{21} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{D_2 f(h,0) - D_2 f(0,0)}{h}$$

essendo

$$D_2 f(h,0) = h \quad \text{e} \quad D_2 f(0,0) = 0$$

segue che $D_{21} f(0,0) = 1$; analogamente si ha $D_{12} f(0,0) = -1$.
Nell'esempio ora considerato, per il teorema precedente, entrambe le derivate parziali miste $D_{12} f$ e $D_{21} f$ non sono continue nell'origine.

Si osservi che:

$$D_1 f(x,y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$D_1 f(0,0) = 0 \qquad (x,y) = (0,0)$$

Scambiando x con y in $-D_1$ f(x,y) si ottiene:

$$D_2 f(x,y) = -(x\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + xy\frac{4yx^2}{(x^2 + y^2)^2})$$

$$D_2 f(x,y) = x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy\frac{4yx^2}{(x^2 + y^2)^2}) \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$D_2 f(0,0) = 0 \qquad\qquad (x, y) = (0,0)$

$$D_{12}\ f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1\ f(0,k) - D_1\ f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} -\frac{k}{k} = -1$$

$$D_{21}\ f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2\ f(h,0) - D_2\ f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Per derivazioni successive, possiamo ottenere derivate parziali terze oppure derivate parziali di ordine superiore. Alcune possibilità sono:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right).$$

Derivate parziali di ordine superiore al primo possono essere denotate in modo più compatto tramite la notazione con pedice. Ad esempio:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = (f_x)_y.$$

Solitamente le parentesi si omettono e si scrive semplicemente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}.$$

Notare che nella notazione "∂" la sequenza delle differenziazioni è ottenuta leggendo da destra verso sinistra, mentre nella notazione con pedice essa è da sinistra verso destra. Ulteriori esempi sono:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{yyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \qquad f_{xxyy} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}.$$

3. DERIVATE PARZIALI DI FUNZIONI DI PIU' DI DUE VARIABILI

Per una funzione $f(x, y, z)$ di tre variabili, ci sono tre **derivate parziali:**

$f_x(x, y, z)$, $\qquad f_y(x, y, z)$, $\qquad f_z(x, y, z)$.

La derivata parziale f_x si calcola considerando *y* e *z* costanti e differenziando rispetto ad *x*. Per f_y le variabili *x* e *z* sono considerate costanti, mentre per f_z le variabili *x* e *y* sono considerate costanti. Se è usata una variabile dipendente *w*:

$$w = f(x, y, z)$$

allora le tre derivate parziali di *f* possono essere denotate da:

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial w}{\partial z}.$$

In generale, se $f(\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots, \nu_n)$ è una funzione di *n* variabili, ci sono *n* derivate parziali di *f*, ognuna delle quali si ottiene considerando costanti *n-1* di queste variabili e differenziando la funzione *f* rispetto alla variabile rimanente. Se $w = f(\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots, \nu_n)$, allora queste derivate parziali sono denotate da:

$\dfrac{\partial w}{\partial \nu_1}, \qquad \dfrac{\partial w}{\partial \nu_2}, \ldots\ldots\ldots, \dfrac{\partial w}{\partial \nu_n}$, dove $\partial w / \partial \nu_i$ si ottiene considerando fisse tutte le variabili eccetto ν_i e differenziando rispetto a ν_i.

Esempio 3.1

Determinare $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2}\right]$, **con** *i*= 1,2,…,n.

Svolgimento:

Per ogni *i*= 1,2,….,*n* si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2}\right] = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left[x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2}}[2x_i] = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2}}.$$

4. DEFINIZIONE

In ogni punto (x, y) dove le derivate parziali prime della funzione $f(x, y)$ esistono, il **vettore gradiente** $\nabla f(x, y)$ è definito mediante la relazione

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{grad}\, f(x, y) = f_1(x, y)\,\mathbf{i} + f_2(x, y)\,\mathbf{j}$$

Ricordiamo che **i** e **j** indicano i vettori unitari della base standard che collegano l'origine rispettivamente con i punti (1,0) e (0,1). Il simbolo ∇ chiamato *del* o *nabla*, è un *operatore differenziale vettoriale*:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

Possiamo applicare questo operatore a una funzione $f(x, y)$ scrivendo l'operatore alla sinistra della funzione. Il risultato è il gradiente della funzione

$$\nabla f(x, y) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) = f_1(x, y)\,\mathbf{i} + f_2(x, y)\,\mathbf{j}$$

4.1 PROPRIETA' DEL GRADIENTE

Siano f e g campi scalari differenziabili in un aperto connesso D, allora:

1) $\nabla(d_1 f_1 + d_2 f_2) = \alpha_1 \nabla f_1 + \alpha_2 \nabla f_2$

2) $\nabla(fg) = f\, \nabla g + g\, \nabla f$

3) $\nabla(f)^n = n(f)^{n-1} \nabla f$

4) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\nabla f - f\,\nabla g}{g^2}$ $\qquad g \neq 0$

1. DIFFERENZIABILITA' DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Ricordiamo che una funzione *f* di una variabile è detta differenziabile i x_0 se esiste la sua derivata in x_0 o, in altre parole, se il limite

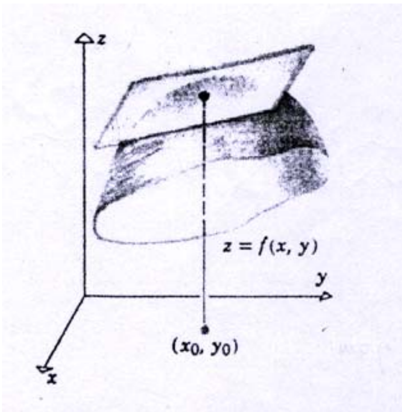
$$f'(x_0) = \lim \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

esiste. Una funzione *f* che è differenziabile in un punto x_0 gode di due importanti proprietà:

i) $f(x)$ è continua in x_0;
ii) la curva $y = f(x)$ ha una retta tangente non verticale in x_0.

Il nostro obiettivo primario in questo paragrafo è di estendere la nozione di differenziabilità a funzioni di due variabili in modo che quando $f(x,y)$ sia differenziabile in (x_0, y_0) risulti:

i) $f(x,y)$ continua in (x_0, y_0);
ii) la superficie $z = f(x,y)$ abbia un piano tangente non verticale in (x_0, y_0) (vedi figura 1; la definizione di piano tangente sarà data in seguito).



Sarebbe ragionevole supporre che una funzione f di due variabili dovrebbe poter essere differenziabile in (x_0, y_0) se è ivi continua e se le due derivate parziali $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ esistono. Sfortunatamente, queste condizioni non sono sufficienti per la differenziabilità, in quanto ci sono funzioni che in un dato punto sono continue e che hanno derivate parziali ma non sono differenziabili.
Per pervenire ad una definizione appropriata di differenziabilità per funzioni di due variabili, sarà di aiuto riesaminare il concetto di differenziabilità per funzioni di una variabile. Assumendo, per il momento, che *f* sia una funzione di una variabile differenziabile in $x = x_0$, la (1) può essere riscritta come:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad (2)$$

o, ugualmente, come:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)\right] = 0 \tag{3}$$

dove

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Se adesso definiamo ε come

$$\varepsilon = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) \tag{4}$$

allora da questa formula segue che

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x \tag{5}$$

dove ε è funzione di Δx. Utilizzando la (4), il limite nella (3) può essere riscritto come:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0 \tag{6}$$

Le formule (5) e (6) conducono alla seguente definizione alternativa di differenziabilità per funzioni di una variabile.

DEFINIZIONE 1.1

Una funzione *f* di una variabile è detta ***differenziabile*** in x_0 se esiste un numero $f'(x_0)$ tale che Δy ovvero Δf possa essere scritto nella forma

$$\Delta\ f = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x \tag{7}$$

dove ε è una funzione di Δx tale che $\varepsilon \to 0$ per $\Delta x \to 0$.

Questa definizione di differenziabilità fornisce le basi per estendere la nozione di differenziabilità a funzioni di due o più variabili. Una interpretazione geometrica di quanto detto nella (7) è fornita dalla figura seguente:

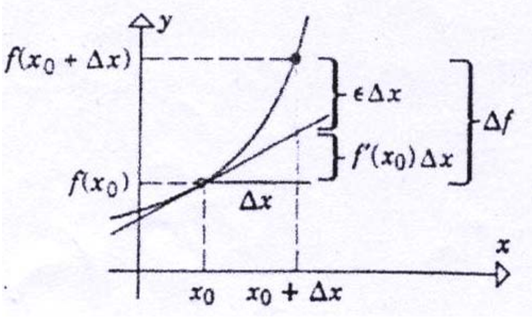


Figura 3

Il termine Δf rappresenta la variazione in altezza di un punto che si muove lungo il grafico di f quando l'ascissa x varia da x_0 a $x_0 + \Delta x$; il termine $f'(x_0)\Delta x$ rappresenta la variazione in altezza di un punto che si muove lungo la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ quando l'ascissa x varia da x_0 a $x_0 + \Delta x$; infine, il termine $\varepsilon\, \Delta x$ rappresenta la differenza tra Δf ed $f'(x_0)\Delta x$. È evidente dalla figura che $\varepsilon\, \Delta x \to 0$. Tuttavia, la (7) asserisce anche che $\varepsilon \to 0$ per $\Delta x \to 0$ come si evince dalla (6). Se f è una funzione di x e y allora il simbolo Δf, chiamato ***incremento*** di f, denota il cambio di valore di $f(x, y)$ che risulta quando (x, y) varia da una posizione iniziale (x_0, y_0) ad una nuova posizione $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x)$; di conseguenza:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{8}$$

(vedi figura 3). Se si usa una variabile dipendente $z = f(x, y)$, allora potremo scrivere Δ z piuttosto che Δf.

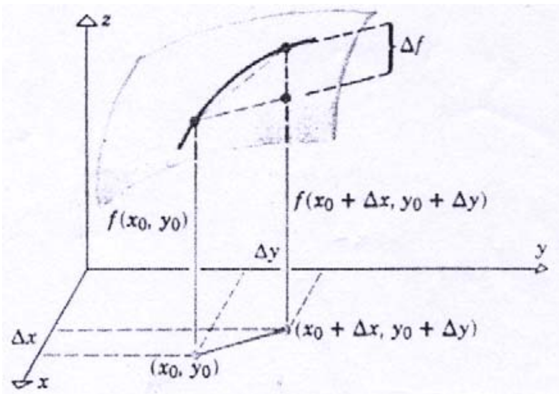


Figura 4

Con riferimento alla definizione 1.1, possiamo adesso definire la differenziabilità per funzioni in due variabili.

DEFINIZIONE 1.2

Una funzione f in due variabili è detta ***differenziabile*** in (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ ed $f_y(x_0, y_0)$ esistono e Δf può essere scritto nella forma:

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \tag{9}$$

dove ε_1 ed ε_2 sono funzioni di Δx e Δy tali che $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ per $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Una funzione è detta ***differenziabile su una regione R*** del piano xy se è differenziabile in ogni punto di R. Una funzione che è differenziabile sull'intero piano xy è detta ***ovunque differenziabile*** o semplicemente ***differenziabile***. Non è difficile verificare che la definizione precedente è equivalente alla seguente:

DEFINIZIONE 1.3

Si dice che la funzione $f(x,y)$ è **differenziabile** nel punto (a,b) se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-h\cdot f_x(a,b)-k\cdot f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \tag{9'}$$

Non è difficile dimostrare che la (9) implica la (9') dove a = x_0, b = y_0, h = Δx e k = Δy_0
Se nella (9') poniamo

$$\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-h\cdot f_x(a,b)-k\cdot f_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}=w(h,k)$$

dalla definizione precedente si evince:
Se una funzione $f(x,y)$ è differenziabile nel punto (a,b) interno al suo dominio allora

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=h\cdot f_x(a,b)+k\cdot f_y(a,b)+w(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \tag{9''}$$

dove $\quad w(h,k)\sqrt{h^2+k^2}=o\cdot\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \quad$ per $\quad (h,k)\to(0,0)$;

Per dimostrare che la (9') implica la (9), si osservi che

$$w(h,k)\sqrt{h^2+k^2}=\left(w(h,k)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)h+\left(w(h,k)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)k=\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k$$

dove

$$\varepsilon_1=w(h,k)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \qquad e \qquad \varepsilon_2=w(h,k)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

sono due funzioni di h e k che tendono a zero per $(h,k)\to(0,0)$.

OSSERVAZIONE.
Prima di procedere oltre, è bene notare che per funzioni di una variabile i termini "è differenziabile" e "ha una derivata" sono sinonimi. Tuttavia, per funzioni in due variabili, la differenziabilità richiede più della semplice esistenza delle derivate parziali e della continuità. Per esempio la funzione $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ nel punto (0,0) è continua, ha derivate parziali $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, tuttavia non è differenziabile in (0,0). Infatti è

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)\,h-f_y(0,0)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\sqrt{\frac{|hk|}{h^2+k^2}}$$

e il

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|hk|}{h^2+k^2}$$

non esiste.

2. RELAZIONI TRA DIFFERENZIABILITA' E CONTINUITA'

In precedenza, ci eravamo posti due obiettivi per la nostra definizione di differenziabilità. Volevamo che una funzione differenziabile in (x_0, y_0) fosse anche continua in (x_0, y_0), e volevamo che il suo grafico avesse un piano tangente non verticale in (x_0, y_0). Il prossimo teorema mostra che l'ipotesi di continuità è soddisfatta; l'esistenza di un piano tangente non verticale sarà dimostrata più avanti.

TEOREMA 2.1

Se f è differenziabile in (x_0, y_0), allora f è continua in (x_0, y_0).

Dimostrazione.
Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

il quale, ponendo $x=x_0+\Delta x$ ed $y=y_0+\Delta y$, equivale a:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)$$

ovvero a

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta f=0$$

Essendo *f* per ipotesi differenziabile in (x_0, y_0), dalla (9) segue che:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta f=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

da cui l'asserto.

Il prossimo teorema, la cui dimostrazione è omessa, fornisce delle semplici condizioni sotto cui una funzione in due variabili è differenziabile in un punto.

TEOREMA 2.2

Se f ha derivate parziali prime in ogni punto di una regione circolare centrata in (x_0, y_0), *e se queste derivate parziali sono continue in* (x_0, y_0), *allora f è differenziabile in* (x_0, y_0).

3. DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

Se y è una funzione differenziabile di una variabile x ed x è una funzione differenziabile di una variabile t, allora la regole di derivazione di funzioni composte afferma che:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Adesso estenderemo questa regola di derivazione a funzioni di due variabili.
Supponiamo che z sia una funzione di due variabili x ed y, diciamo

$$z = f(x, y) \tag{10}$$

e supponiamo che x ed y siano rispettivamente funzioni di una sola variabile t:

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

Sostituendo queste funzioni nella (10), otteniamo la relazione

$$z = f(x(t), y(t))$$

che esprime z come una funzione della sola variabile t. Sussiste il seguente

TEOREMA 3.1 (***derivazione di funzioni composte***).

Se $x = x(t)$ *e* $y = y(t)$ *sono derivabili in t, e se* $z = f(x, y)$ *è differenziabile nel punto* $(x(t), y(t))$, *allora* $z = f(x(t), y(t))$ *è derivabile in t, e*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{11}$$

Nel caso particolare in cui $z = F(x, y)$ ed y è una funzione derivabile della variabile x, la formula (11) conduce al risultato:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Si osservi che altre notazioni possibili sono

$$\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt};$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt};$$

$$\frac{df}{dt} = f_x x'(t) + f_y y'(t).$$

ma è possibile costruire anche altre svariate scritture.

Nel teorema 3.1 le variabili x e y sono ognuna funzione di singola variabile t. Adesso consideriamo il caso in cui x e y sono funzioni di due variabili. Poniamo

$$z = f(x, y) \tag{12}$$

e supponiamo che x ed y siano funzioni di u e v, diciamo

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v).$$

Sostituendo queste funzioni di u e v nella (12), otteniamo la relazione

$$z = f(x(u, v), y(u, v))$$

che esprime z come una funzione delle due variabili u e v. In questo caso sussiste il

TEOREMA 3.2 (***regola di derivazione a catena***).

Se $x = x(u, v)$ *e* $y = y(u, v)$ *hanno derivate parziali prime nel punto* (u, v), *e se* $z = f(x, y)$ *e differenziabile nel punto* $(x(u, v), y(u, v))$, *allora* $z = f(x(u, v), y(u, v))$ *ha derivate parziali prime in* (u, v) *date da:*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

4. DIFFERENZIALI TOTALI

4.1 PIANI TANGENTI

Ricordiamo che C è una curva parametrica liscia nello spazio tridimensionale allora la retta tangente a C nel punto P_0 è la retta che attraversa P_0 lungo il vettore unitario tangente a C in P_0 (figura 4). Il concetto di piano tangente è basato su questa definizione. Il seguente teorema stabilisce le condizioni che assicurano l'esistenza di un piano tangente e fornisce il metodo per trovare le sue equazioni.

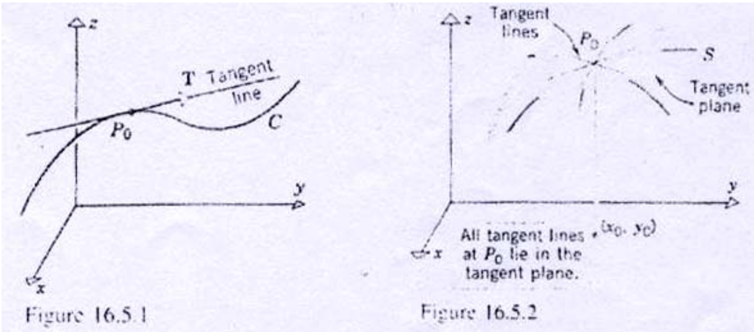


Figura 5

TEOREMA 4.1.1

Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto sulla superficie $z = f(x, y)$. Se $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0), allora la superficie ha un piano tangente in P_0 di equazione

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \tag{13}$$

Dimostrazione.
Per provare l'esistenza del piano tangente in P_0, dobbiamo dimostrare che tutte la curve lisce sulla superficie $z = f(x, y)$ che passano per P_0 hanno rette tangenti giacenti sullo stesso piano. Lo faremo mostrando che curve hanno un vettore tangente unitario in P_0 normale al vettore

$$n = \left\langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1 \right\rangle \tag{14}$$

Queste rette saranno sicuramente tutte tangenti in P_0 alle suddette curve e giacenti sul piano che passa per P_0 e ad *n* normale. Inoltre, dalla (14) segue che l'equazione normale al punto di questo piano è la (13). Premesso ciò, completiamo la dimostrazione. Sia C una curva liscia giacente sulla superficie $z = f(x, y)$ passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Si assuma, inoltre, che C abbia equazioni parametriche

$$x = x(s); \qquad y = y(s); \qquad z = z(s);$$

dove s è il parametro lunghezza d'arco e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è il punto su C che corrisponde al valore $s = s_0$. Quindi, $x_0 = x(s_0)$, $y_0 = y(s_0)$, e $z_0 = z(s_0)$. Siccome C giace sulla superficie $z = f(x, y)$, ogni punto $(x(s), y(s), z(s))$ deve soddisfare questa equazione per ogni s, quindi

$$z = f(x(s), y(s))$$

per ogni s.
Se deriviamo entrambi i membri di questa equazione e applichiamo il teorema derivazione funzioni composte con s al posto di t, otteniamo

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds};$$

oppure

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{dz}{ds} = 0$$

La parte sinistra di questa equazione può essere riscritta come un prodotto scalare:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right\rangle \cdot \left\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right\rangle = 0$$

oppure

$$\langle f_x(x, y), f_y(x, y), -1 \rangle \cdot \langle x'(s), y'(s), z'(s) \rangle = 0$$

In particolare, se $s = s_0$ abbiamo

$$\langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1 \rangle \cdot \langle x'(s_0), y'(s_0), z'(s_0) \rangle = 0 \tag{15}$$

Ma il secondo vettore nel prodotto è il vettore unitario tangente a C nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, quindi dalla (15) il vettore unitario tangente a C in P_0 è perpendicolare al vettore

$$n = \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1 \rangle$$

che completa la dimostrazione.
Se $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0), allora il vettore

$$n = \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1 \rangle \tag{16}$$

è detto ***vettore normale*** alla superficie $z = f(x, y)$ in $P_0(x_0, y_0, z_0)$, e la retta passante per P_0 parallela a n è detta ***retta normale*** alla superficie in P_0 (figura 5). Le equazioni parametriche della retta normale sono:

$x = x_0 + f_x(x_0, y_0)$;

$y = y_0 + f_y(x_0, y_0)$;

$z = z_0 - t$;

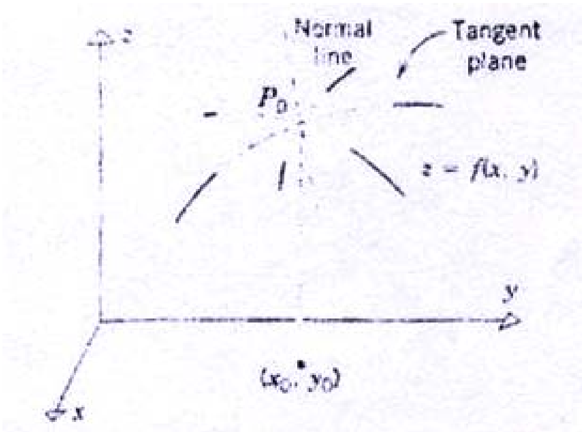


Figura 6

Esempio 4.1.1
Trovare l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie $z = x^2 y$ nel punto $(2,1,4)$.

Soluzione.

Dato che $f(x, y) = x^2 y$, segue che

$$f_x(x, y) = 2xy \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = x^2.$$

Quindi per $x = 2$ e $y = 1$,

$$f_x(2,1) = 4 \qquad \text{e} \qquad f_y(2,1) = 4$$

quindi, il vettore normale alla superficie in $(2,1,4)$ è

$$n = f_x(2,1)\ \mathbf{i} + f_y(2,1)\ \mathbf{j} - \mathbf{k} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Perciò, il piano tangente ha equazione

$$4(x-2) + 4(y-1) - (z-4) = 0 \qquad \text{o} \qquad 4x + 4y - z = 8$$

e la retta normale ha equazioni

$$x = 2 + 4t, \qquad y = 1 + 4t, \qquad z = 4 - t.$$

ATTENZIONE.
Nel paragrafo precedente abbiamo posto due condizioni per la definizione di differenziabilità di una funzione $f(x,y)$ di due variabili nel punto $(x_0, y_0) - f$ deve essere continua in (x_0, y_0) e la superficie $z = f(x,y)$ non deve avere tangenti verticali in (x_0, y_0). Il teorema 2.1 afferma che la differenziabilità implica la continuità e ora il teorema 4.1.1 mostra che la differenziabilità implica l'esistenza di un piano tangente non verticale. Il piano tangente dato dalla (13) è non verticale perché la terza componente del vettore normale *n* nella (14) è diversa da 0.

5. DIFFERENZIALI

Ricordiamo che se $y = f(x)$ è una funzione di una variabile, allora il differenziale

$$dy = f'(x_0)dx$$

rappresenta la variazione di *y* lungo la *retta tangente* in (x_0, y_0) prodotta da una variazione *dx* della variabile *x* e

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

rappresenta la variazione in *y* lungo la curva $y = f(x)$ prodotta da una variazione Δx della variabile *x*. Analogamente, se $z = f(x,y)$ è una funzione di due variabili, definiremo *dz* come la variazione in *z* lungo il *piano tangente* in (x_0, y_0, z_0) alla superficie $z = f(x,y)$ prodotta dalle variazioni *dx* e *dy* rispettivamente delle variabili *x* e *y*. In questo caso

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

rappresenta la variazione in *z* lungo la *superficie* dovuta alle variazioni Δx e Δy rispettivamente delle variabili *x* e *y*.
Per ricavare una formula per *dz*, sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto fissato sulla superficie $z = f(x,y)$. Se *f* è differenziabile in (x_0, y_0) allora la superficie ha un piano tangente in P_0 dato dall'equazione

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

o

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy \tag{17}$$

Dalla (17) segue che il piano tangente ha altezza z_0 quando $x = x_0$, $y = y_0$ ed ha altezza

$$z_0 + f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy \tag{18}$$

quando $x = x_0 + dx$, $y = y_0 + dy$. Quindi, la variazione *dz* nell'altezza del piano tangente, siccome (x,y) varia da (x_0, y_0) a $(x_0 + dx, y_0 + dy)$, è ottenuta sottraendo z_0 all'espressione (18). Risulta

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Questa quantità è chiamata ***differenziale totale*** di *z* in (x_0, y_0). Spesso x_0 e y_0 sono omessi, cioè

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy \tag{19}$$

Di solito, in questa formula, *dx* e *dy* sono viste come variabili e *x* e *y* come costanti. La (19) può essere anche scritta usando *df* al posto di *dz*. Se $z = f(x, y)$ è differenziabile nel punto (x, y), allora l'incremento Δz può essere scritto come

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \tag{20}$$

dove $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, per $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Nel caso in cui $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$, dalla (19) e dalla (20) segue che

$$\Delta z = dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y\ .$$

Geometricamente, questa approssimazione ci dice che la variazione di *z* lungo il la superficie e la variazione di *z* lungo il piano tangente sono approssimativamente uguali per $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$ piccoli.

Esempio 5.1
Sia $z = 4x^3y^2$. Trovare *dz*.

Soluzione.

Essendo $f(x, y) = 4x^3y^2$, segue che

$$f_x(x, y) = 12x^2y^2 \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 8x^3y$$

quindi

$$dz = 12x^2y^2dx + 8x^3ydy$$

Esempio 5.2
Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Usa un differenziale totale per approssimare la variazione di $f(x, y)$ per (x, y) che varia dal punto $(3,4)$ al punto $(3.04,3.98)$.

Soluzione.

Approssimeremo Δf (variazione di *f*) con

$$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

Siccome $x = 3$, $y = 4$, $dx = 0.04$, $dy = -0.02$ otteniamo

$$\Delta f \approx df = \frac{3}{\sqrt{9+16}}(0.04) + \frac{4}{\sqrt{9+16}}(-0.02)$$

$$= \frac{3}{5}(0.04) - \frac{4}{5}(0.02) = 0.008$$

Si osservi (usare una calcolatrice) che il vero valore di Δf con cinque cifre decimali dopo la virgola è

$$\Delta z = \sqrt{(3.04)^2 + (3.98)^2} - \sqrt{3^2 + 4^2} \approx 0.00819$$

Esempio 5.3
Il raggio di cilindro circolare è misurato con un errore del 2% circa, e l'altezza è misurata con un errore del 4% circa. Approssimare la massima percentuale di errore possibile nel volume *V* calcolato da queste misurazioni.

Soluzione.

Siano *r*, *h*, *V* il raggio, l'altezza e il volume del cilindro e siano Δr, Δh, ΔV gli errori di queste quantità. Dai dati forniti risulta che

$$\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \le 0.02 \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{\Delta h}{h}\right| \le 0.04$$

Vogliamo trovare il massimo valore possibile di $\left|\frac{\Delta V}{V}\right|$. Siccome il volume del cilindro è $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ segue dalla (19) che

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr + \pi \cdot r^2 \cdot dh$$

Se scegliamo $dr = \Delta r$ e $dh = \Delta h$ possiamo usare l'approssimazione

$$\Delta V \approx dV \qquad \text{e} \qquad \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V}$$

ma

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot r \cdot dr + \pi \cdot r^2 \cdot dh}{\pi \cdot r^2 \cdot h} = 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

quindi dalla disuguaglianza triangolare

$$\left|\frac{dV}{V}\right| = \left|2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}\right| \le 2\left|\frac{dr}{r}\right| + \left|\frac{dh}{h}\right| \le 2(0.02) + (0.04) = 0.08$$

perciò, la percentuale massima di errore in V è circa 8%.

5. DERIVATE DIREZIONALI

Le derivate parziali prime $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ forniscono la rapidità di variazione di $f(x,y)$ in (a,b) misurata rispettivamente nella direzione positiva dell'asse x e in quella dell'asse y. Se vogliamo conoscere quanto rapidamente varia $f(x,y)$ in (a,b) quando il punto (x,y) si muove nel dominio di f in qualche altra direzione, abbiamo bisogno del concetto, più generale, di **derivata direzionale**. Possiamo sempre specificare la direzione considerata mediante un vettore non nullo di lunghezza qualsiasi, tuttavia è più conveniente usare un *vettore unitario*.

DEFINIZIONE 5.1

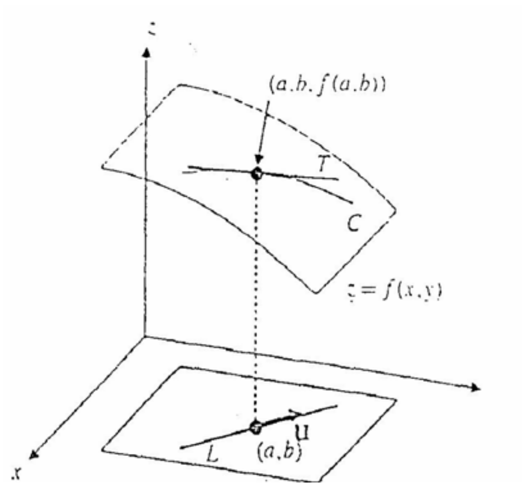
Sia $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ un vettore unitario, ossia $u_1^2 + u_2^2 = 1$. La **derivata direzionale** di $f(x,y)$ in (a,b) nella direzione di $\mathbf{u}$ è la rapidità di variazione di $f(x,y)$ rispetto alla distanza misurata nel punto (a,b) lungo una retta di direzione $\mathbf{u}$ nel piano xy. Questa derivata direzionale è data da

$$D_u f(a,b) = \lim_{h \to o+} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h}$$

Se poniamo $g(t) = f(a+tu_1, b+tu_2)$ allora la derivata direzionale è data anche da

$$D_u f(a,b) = g'(0)$$

se la derivata al secondo membro esiste.



Il vettore unitario $\mathbf{u}$ determina una retta L passante per (a,b) nel dominio di f. Il piano verticale contenente L interseca il grafico di f lungo una curva C la cui tangente T in $(a,b,f(a,b))$ ha la pendenza $D_{\mathbf{u}} f(a,b)$.

Si osservi che le derivate direzionali in direzioni parallele agli assi coordinati sono date direttamente dalle derivate parziali prime:

$$D_{\mathbf{i}} f(a,b) = f_x(a,b) \ , \ D_{\mathbf{j}} f(a,b) = f_y(a,b)$$

$$D_{-\mathbf{i}} f(a,b) = -f_x(a,b) \text{ e } D_{-\mathbf{j}} f(a,b) = -f_y(a,b).$$

Il teorema seguente mostra come il gradiente di una funzione differenziabile permetta di calcolare qualunque derivata direzionale.

TEOREMA 5.2 (**derivata direzionale e gradiente**)

Se f è differenziabile in (a,b) *e* $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ *è un vettore unitario, allora la derivata direzionale di f in* (a,b) *nella direzione di* ***u*** *è data da*

$$D_{\boldsymbol{u}} f(a,b) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla f(a,b)$$

*Dimostrazione***.**
Per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \left(\frac{d}{dt} f(a+tu_1, b+tu_2) \right)\Bigg|_{t=0} = u_1 f_1(a,b) + u_2 f_2(a,b)$$

Se *f* è una funzione differenziabile, la formula della derivata direzionale

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)u_1 + f_y(x,y)u_2$$

può essere espressa come un prodotto scalare scrivendo

$$D_u f(x,y) = \left(f_x(x,y)\,\mathbf{i} + f_y(x,y)\,\mathbf{j}\right)\cdot\left(u_1\ \mathbf{i} + u_2\ \mathbf{j}\right)$$

dove il primo vettore nel prodotto è il *gradiente* di *f* mentre il secondo è **u.** Pertanto la formula precedente per la derivata direzionale può essere riscritta nella seguente forma compatta.

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$$

In altre parole, se *f* è una funzione differenziabile il prodotto scalare tra il gradiente di *f* e un vettore unitario **u** fornisce la derivata direzionale, nella direzione di **u**.
Già sappiamo che l'esistenza delle derivate parziali di una funzione in un punto non implica che essa sia continua nel punto e ancora meno che sia differenziabile. La stessa cosa può dirsi riguardo alle derivate direzionali. L'esempio che segue mostra che una funzione può avere derivata direzionale in ogni direzione in un punto dato e ugualmente non essere continua in quel punto.

Esempio 5.1
Trovare il gradiente di $f(x,y)=3x^2y$ nel punto $(1,2)$ e usarlo per calcolare la derivata direzionale di *f* nel medesimo punto nella direzione del vettore $v = 3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$.

Svolgimento.

Da

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\mathbf{i} + f_y(x,y)\,\mathbf{j} = 6xy\,\mathbf{i} + 3x^2\,\mathbf{j}$$

si evince che di *f* in $(1,2)$ è

$$\nabla f(1,2) = 12\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$$

Poiché il vettore unitario nella direzione di *v* è

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{5}(3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}) = \frac{3}{5}\,\mathbf{i} + \frac{4}{5}\,\mathbf{j}$$

segue che

$$D_u f(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot \mathbf{u} = \frac{48}{5}$$

Esempio 5.2
Siano

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbf{u}} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$$

Allora

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\,\frac{h^3 {u_1}^2 u_2}{h^2\left(h^2{u_1}^4 + {u_2}^2\right)} = \frac{{u_1}^2}{u_2} \qquad u_2 \neq 0$$

Se $u_2 = 0$ allora $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{i}$ e

$$D_{\mathbf{i}} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0$$

Quindi la funzione data ha nel punto (0,0) derivata direzionale in ogni direzione ma (come già visto) non è continua in (0,0). Si osservi che in questo caso è $\nabla f(0,0) = 0$ e quindi risulta

$$\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u} \neq D_{\mathbf{u}} f(0,0).$$

6. PROPRIETA' DEL GRADIENTE

La lunghezza e la direzione del vettore gradiente ∇f forniscono importanti informazioni riguardanti la funzione *f*.

TEOREMA 6.1

Sia f una funzione di due variabili e differenziabile in (x_0, y_0).

a) *Se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, allora tutte le derivate direzionali di f in (x_0, y_0) sono nulle;*
b) *Se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, allora tra tutte le possibili derivate direzionali di f in (x_0, y_0), quella nella direzione del $\nabla f(x_0, y_0)$ è quella con il valore più grande. Il valore di questa derivata è $\| \nabla f(x_0, y_0) \|$;*
c) *Se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, allora tra tutte le possibili derivate direzionali di f in (x_0, y_0), quella nella direzione opposta al $\nabla f(x_0, y_0)$ è quella con il valore più piccolo. Il valore di questa derivata è $-\| \nabla f(x_0, y_0) \|$.*

Dimostrazione.

a) *se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, allora per ogni scelta di* **u** *abbiamo*

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u} = 0;$$

b) *e c) si assuma $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ e sia θ l'angolo tra $\nabla f(x_0, y_0)$ e un vettore unitario arbitrario* **u.** *Dalla definizione*

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} = \| \nabla f(x_0, y_0) \| \; \|\mathbf{u}\| \cos\theta$$

da cui se $\|\mathbf{u}\| = 1$

$$D_u f(x_0, y_0) = \| \nabla f(x_0, y_0) \| \cos\theta$$

*Così, il massimo valore di $D_u f(x_0, y_0)$ è $\| \nabla f(x_0, y_0) \|$. Questo accade quando $\cos\theta = 1$, o quando **u** ha la stessa direzione di $\nabla f(x_0, y_0)$ (cioè θ=0). Il minimo valore di $D_u f(x_0, y_0)$ è $\| \nabla f(x_0, y_0) \|$ che si ottiene quando $\cos\theta = -1$, cioè quando* **u** *e $\nabla f(x_0, y_0)$ sono in direzioni opposte (cioè θ=π).*

Esempio 6.1
Per la funzione $f(x,y)=x^2e^y$, trovare il minimo valore della derivata direzionale in $(-2,0)$, e fornire un vettore unitario nella direzione in cui si ha il massimo valore.

Soluzione.

Siccome

$$\nabla f(x_0,y_0)=f_x(x,y)\,\mathbf{i}+f_y(x,y)\,\mathbf{j}=2xe^y\;\mathbf{i}+x^2e^y\;\mathbf{j}$$

Il gradiente di *f* in $(-2,0)$ è

$$\nabla f(-2,0)=-4\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j}$$

Dal teorema 6.1, il valore massimo della derivata direzionale è

$$\|\nabla f(-2,0)\|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

Un vettore unitario in questa direzione è

$$\frac{\nabla f(-2,0)}{\|\nabla f(-2,0)\|}=\frac{1}{4\sqrt{2}}(-4\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j})=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j}$$

7. UNA INTERPRETAZIONE DI $\mathbf{D_u T(x, y)}$

Supponiamo che un osservatore si stia muovendo sul piano *xy* e che in ogni punto (x,y) del piano il valore della temperatura sia dato da $T(x,y)$. Inoltre supponiamo che nell'istante in cui l'osservatore passa per (x_0,y_0) si stia muovendo nella direzione del vettore **w** con velocità **v** di modulo k.
Se poniamo

$$\hat{u}=\frac{w}{|w|}\quad \text{e}\quad \mathbf{v}=k\hat{\mathbf{u}}$$

allora

$$i)\; D_{\hat{u}}T(x_0,y_0)=\nabla T(x_0,y_0)\cdot\hat{u}\quad\left[\frac{\textit{unità di }T}{\text{unità di distanza}}\right]$$

fornisce la rapidità di variazione della temperatura percepita dall'osservatore, misurata in unità di *T* per unità di distanza sul piano *xy*;

ii)

$$D_{\mathrm{v}}T(x_0, y_0) = \nabla T(x_0, y_0) \cdot \mathrm{v} = k\nabla T(x_0, y_0) \cdot \hat{\mathrm{u}} \quad \left[\frac{\text{unità di distanza}}{\text{unità di tempo}}\right]\left[\frac{\text{unità di T}}{\text{unità di distanza}}\right] = \left[\frac{\text{unità di T}}{\text{unità di tempo}}\right]$$

fornisce la rapidità di variazione della temperatura percepita dall'osservatore, misurata in unità di T per unità di tempo.

Osservazione

Se f è di classe $C^{(2)}$ allora la derivata direzionale seconda è data da:

$$D_{\hat{\mathrm{u}}}(D_{\hat{\mathrm{u}}}f) = D_{\hat{\mathrm{u}}}(\nabla f \cdot \hat{\mathrm{u}}) = D_{\hat{\mathrm{u}}}(\mathrm{u}_1 f_x + \mathrm{u}_2 f_y) = \mathrm{u}_1(\mathrm{u}_1 f_{xx} + \mathrm{u}_2 f_{yx}) + \mathrm{u}_2(\mathrm{u}_1 f_{xy} + \mathrm{u}_2 f_{yy})$$

Da cui

$$D_{\hat{\mathrm{u}}}(D_{\hat{\mathrm{u}}}f) = f_{xx}\mathrm{u}_1^{\,2} + 2\mathrm{u}_1\mathrm{u}_2 f_{xy} + \mathrm{u}_2^{\,2} f_{yy} \quad .$$

Sia $z = f(x, y,)$ un campo scalare differenziabile in un aperto Ω del piano xy. Indichiamo con C la curva di livello $f(x, y,) = c$. Sia $P_o \equiv (x_o, y_o)$ un punto di C e supponiamo che C sia descritta parametricamente dall'equazione vettoriale di classe $C^{(1)}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad t \in [a, b]$$

e che $\mathbf{r}(t_0) = P_0$ dove $a < t_o < b$. Procedendo come nel caso delle funzioni di tre variabili (vedi parag. 8) si evince che:
in ogni punto di una curva di livello C il vettore ∇f è normale a C; in particolare in $t = t_o$, risulta

$$\nabla f[\mathbf{r}(t_0)] \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0 .$$

la curva di livello che passa per P_0 ha in P_0 vettore tangente perpendicolare al vettore $\nabla f(P_0)$. Sia C una curva liscia di equazioni $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Se $\hat{\mathbf{T}}(t)$ denota il vettore unitario tangente a C in $\mathbf{r}(t)$ allora il prodotto scalare $\nabla f[\mathbf{r}(t)] \cdot \hat{\mathbf{T}}$ è per definizione **la derivata direzionale di *f* nella direzione di** C e spesso si indica con $\frac{\partial f}{\partial s}$. Il valore di

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{T}}$$

dipende dalla rappresentazione parametrica scelta per C. Infatti il verso di percorrenza e quindi il verso di $\hat{\mathbf{T}}$ dipende dalla scelta della rappresentazione parametrica. Se C è una curva di livello allora la derivata di f lungo C è nulla ed è massima lungo la direzione normale a C.

TEOREMA 6.2 (**del valormedio**)

Se $z = f(x, y)$ *una funzione di classe* $C^{(1)}(\Omega)$ *dove* Ω *è un aperto, allora*

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\partial_1 f(a+\theta h, b+\theta k) + k\partial_2 f(a+\theta h, b+\theta k)$$

dove (a,b) *e* $(a+h,b+k)$. Sono gli estremi di un segmento contenuto in Ω.

Dimostrazione.
Incominciamo ad osservare che le equazioni parametriche

$$x = a + th \qquad y = b + th \qquad t \in [0,1]$$

descrivono il segmento di estremi (a,b) e $(a+h,b+k)$.
Pertanto se scegliamo *h* e *k* tali che $h^2 + k^2 < r^2$ allora il segmento suddetto sta nel disco con centro in (a,b), di raggio r e contenuto in Ω.
Sia $g(t) = f(a+th,b+tk)$ $t \in [0,1]$. Essendo *f* differenziabile in Ω, il teorema di derivazione delle funzioni composte ci dice che *g* è derivabile e che

$$g'(t) = h\,\partial_1 f(a+th,b+tk) + k\,\partial_2 f(a+th,b+tk) \qquad t \in [0,1]$$

Da cui, per il teorema del valor medio per le funzioni di una variabile, si ottiene

$$g(1) - g(0) = g'(\theta) \qquad \text{per qualche } \theta \in (0,1)$$

ovvero

$$g(1) = g(0) + g'(\theta).$$

Essendo

$$g(1) = f(a+h,b+k) \qquad g(0) = f(a,b)$$

segue che

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\,\partial_1 f(a+\theta h,b+\theta k) + k\,\partial_2 f(a+\theta h,b+\theta k)$$

Ovvero l'asserto.

COROLLARIO

Nelle ipotesi del teorema precedente:
se $\nabla f(x,y) = 0$ in tutti di un segmento δ contenuto in Ω, allora *f* è costante su δ. Infatti, se (a,b) è un estremo del segmento δ e $(a+h,b+k)$ è un generico punto di δ, dal teorema precedente (tenuto presente che le derivate parziali sono uguali a zero su δ) segue che $f(a+h,b+k) = f(a,b)$.

TEOREMA 6.3

Sia f una funzione differenziabile in un aperto connesso Ω. Se in Ω risulta $\nabla f = 0$ *allora f è costante in Ω. Inoltre se due campi scalari f e g, differenziabili in Ω, hanno lo stesso gradiente allora f e g differiscono per una costante arbitraria.*
Quindi nelle ipotesi suddette

$$\nabla f = \nabla g \text{ se solo se } f-g=k$$

dove k è una costante arbitraria.

Da quanto precede:
se $\nabla f = 0$ *in un disco D di centro* (a,b) *e raggio r allora f è costante in D.*
Infatti, se scegliamo h e k tali che $h^2 + k^2 < r^2$ *allora il punto* $(a+h, b+k)$ *denota un punto* (x,y) *del disco D e poiché le derivate parziali sono uguali a zero in D e quindi sul segmento di estremi* (a,b) *e* (x,y) *si evince che:*

$$f(x,y) = f(a,b) \qquad \forall (x,y) \in D$$

9.1 FORMULE DI TAYLOR DELL'ORDINE 2

Se $f(x,y)$ è di classe $C^{(2)}$ in un intorno di un punto (a,b) allora esiste un numero θ con 0 < θ < 1 tale che, per *h* e *k* sufficientemente piccoli in valore assoluto, risulta

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\, f_x(a,b) + k\, f_y(a,b) +$$
$$+1/2\, \left[h^2 f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) + 2\cdot h\cdot k\cdot f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2 \cdot f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)\right]$$

infatti posto $g(t) = f(a+th, b+tk)$ $t \in [0,1]$ per la formula di Taylor di ordine n=2

$$g(t) = g(0) + g'(\theta)\, t + \frac{g''(\theta)}{2!} \qquad \text{dove } 0 < \theta < 1.$$

Da cui tenuto presente che:

$$g'(t) = h\, f_x(a+th, b+tk) + k\, f_y(a+th, b+tk)$$
$$g''(t) = h^2 f_{xx}(a+th,b+tk) + h\,k\, f_{yx}(a+th,b+tk) + k^2 f_{yy}(a+th,b+tk) + h\,k\, f_{xy}(a+th,b+tk) =$$
$$= h^2\, f_{xx}(a+th,b+tk) + 2\,h\,k\, f_{xy}(a+th,b+tk) + k^2\, f_{yy}(a+th,b+tk)$$

si evince l'asserto.

8. DIFFERENZIABILITA' DERIVATE DIREZIONALI E GRADIENTE PER FUNZIONI DI 3 VARIABILI

In questo paragrafo estenderemo i concetti espressi nei precedenti paragrafi a funzioni di tre variabili. La principale differenza tra funzioni di 2 e 3 variabili è geometrica: il grafico di $z = f(x, y)$ rappresenta una superficie nello spazio tridimensionale, mentre $w = f(x, y, z)$ non ha una analoga interpretazione.

8.1 DIFFERENZIABILITA'

La definizione e i teoremi base riguardanti la differenziabilità per funzioni di 3 variabili sono generalizzazioni dei corrispondenti teoremi per funzioni di 2 variabili.

DEFINIZIONE 8.1.1

Una funzione f di 3 variabili è differenziabile nel punto (x_0, y_0, z_0) se le derivate parziali $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f_y(x_0, y_0, z_0)$ e $f_z(x_0, y_0, z_0)$ esistono e

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

può essere riscritta nella forma

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ε_3 sono funzioni di $\Delta x, \Delta y$ e Δz tale che $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ e $\varepsilon_3 \to 0$ per $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)$.

TEOREMA 8.1.1

Se f ammette derivate parziali prime in ogni punto di una certa regione sferica centrata in (x_0, y_0, z_0), *e se la derivate parziali sono continue in* (x_0, y_0, z_0), *allora f è differenziabile in* (x_0, y_0, z_0).

TEOREMA 8.1.2 **(regola derivazione funzioni composte)**

Se $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, *sono differenziabili in t e* $w = f(x, y, z)$ è differenziabile nel punto $(x(t), y(t), z(t))$ *è differenziabile in t, e*

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Quindi, come per le funzioni di una e due variabili, una funzione di tre variabili è continua in un punto se è differenziabile in quel punto.

Esempio 8.1.1
Supporre che

$$w = x^3 y^2 z\,, \qquad x = t^2\,, \qquad y = t^3\,, \qquad z = t^4$$

Usare il **teorema di derivazione funzioni composte** per trovare dw/dt.

Soluzione.

Dal teorema della “derivazione delle funzioni composte”,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \left(3x^2 y^2 z\right)2t + \left(2x^3 yz\right)3t^2 + \left(x^3 y^2\right)4t^3 =$$

$$= \left(3t^{14}\right)\left(2t\right) + \left(2t^{13}\right)\left(3t^2\right) + \left(t^{12}\right)\left(4t^3\right) = 16t^{15}$$

NOTA BENE.
La differenza più significativa tra funzioni di 2 e di 3 variabili è geometrica. Per una funzione di 2 variabili l’equazione $z = f(x, y)$ può essere rappresentata come una superficie in uno spazio tridimensionale. Sebbene, per funzioni di tre variabili, rappresentate con un grafico $w = f(x, y, z)$ è impossibile, perché sono richieste 4 dimensioni (una per ogni variabile), questo non è un problema, significa semplicemente che dobbiamo fare affidamento più sulla formula analitica che sulla geometrica.

9. DERIVATE DIREZIONALI

Per definire una derivata direzionale in un punto (x_0, y_0, z_0) per una funzione *f* di tre variabili, useremo un vettore unitario $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ per designare le direzioni, e sia *l* la retta passante per (x_0, y_0, z_0) e parallela ad **u**. Questa retta può essere parametrizzata come

$$x = x_0 + su_1\,, \qquad y = y_0 + su_2\,, \qquad z = z_0 + su_3\,,$$

dove *s* è il parametro di lunghezza d’arco riferito al punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e direzione positiva nella direzione di **u**. All’incrementare di *s*, il punto $P_0 = (x, y, z)$ si muove nella direzione di **u** lungo *l*, ed il valore di $w = f(x, y, z)$ varia con *s*. Come per funzioni di 2 variabili, definiamo $D_u f(x_0, y_0, z_0)$ il tasso istantaneo di variazione di *w* rispetto a *s* in (x_0, y_0, z_0). Procedendo come nel paragrafo precedente si arriva alla seguente definizione.

DEFINIZIONE 9.1

Se *f* è differenziabile in (x_0, y_0, z_0) e se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ è un vettore unitario, allora la derivata di *f* in (x_0, y_0, z_0) nella direzione di **u** è definita da

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)u_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)u_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)u_3 \tag{1}$$

La definizione di gradiente di una funzione di tre variabili è

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x_0, y_0, z_0)u_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)u_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)u_3 \tag{2}$$

che è identica alla definizione precedente eccetto per il terzo addendo. Segue dalla (1) e dalla (2) che

$$D_u f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathrm{u}$$

analoga alla definizione già vista. Considerando ciò si dimostra la seguente estensione del teorema 6.1.

TEOREMA 9.2

Sia f una funzione di tre variabili differenziabile in (x_0, y_0, z_0).

a) *Se* $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$, *allora tutte le derivate direzionali di f in* (x_0, y_0, z_0) *sono nulle;*
b) *Se* $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, *allora tra tutte le possibili derivate direzionali di f in* (x_0, y_0, z_0), *quella nella direzione del* $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ *è quella con il valore più grande. Il valore di questa derivata è* $\| \nabla f(x_0, y_0, z_0) \|$;
c) *Se* $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, *allora tra tutte le possibili derivate direzionali di f in* (x_0, y_0, z_0), *quella nella direzione opposta al* $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ *è quella con il valore più piccolo. Il valore di questa derivata è* $-\| \nabla f(x_0, y_0, z_0) \|$.

Esempio 9.1
Trovare la derivata direzionale di $f(x, y, z) = x^2 y - yz^3 + z$ nel punto $P(1, -2, 0)$ nella direzione del vettore $v = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$, e trovare il massimo tasso di incremento di *f* in P.

Soluzione.

Siccome

$$f_x(x, y, z) = 2xy, \qquad f_y(x, y, z) = x^2 - z^3, \qquad f_z(x, y, z) = 1 - 3z^2 y$$

segue che

$$\nabla f(x,y,z) = 2xy\,\mathbf{i} + \left(x^2 - z^3\right)\mathbf{j} + \left(-3yz^2 + 1\right)\mathbf{k}$$

$$\nabla f(1,-2,0) = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Un vettore unitario nella direzione di v è

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{9}}(2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

da cui

$$D_u f(1,-2,0) = \nabla f(1,-2,0) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{-3}$$

il massimo tasso di incremento di f è

$$\|\nabla f(1,-2,0)\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}\ .$$

Esempio 9.2

Sia f(x,y,z) = ln $\|\bar{r}\|$ **dove** $r = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ **. Allora** $\|\bar{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ **e**

f(x,y,z) = $\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

Essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

segue che

$$\nabla\left(\ln\|\bar{r}\|\right) = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\bar{\mathbf{j}} + z\,\bar{\mathbf{k}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|}$$

Il nostro nuovo obiettivo è quello di stabilire una **relazione geometrica tra le superfici di livello e il gradiente di una funzione *f*** di tre variabili.

A questo proposito sia $u = f(x, y, z)$ un campo scalare differenziabile in un aperto Ω dello spazio tridimensionale. Indichiamo con S la superficie di livello $f(x, y, z) = c$. Sia $P_o\left(x_o, y_o, z_o\right)$ un punto di S e C una curva regolare che sta su S e che passa per P_o. Supponiamo che C sia decritta parametricamente dalla equazione vettoriale

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \quad t \in [a, b]$$

e che $\mathbf{r}(t_0) = P_0$ dove $a < t_o < b$. Ovviamente è

$$f[\mathbf{r}(t)] = f[x(t), y(t), z(t)] = c \quad t \in [a, b]\ .$$

Se poniamo

$$g(t) = f[\mathbf{r}(t)] \quad t \in [a, b]$$

la regola di derivazione delle funzioni composte ci fornisce

$$g'(t) = \nabla f[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) \quad t \in [a, b] \,.$$

Poichè g è costante su $[a, b]$, abbiamo $g'(t) = 0$ su $[a, b]$. In particolare per $t = t_o$, risulta

$$\nabla f[\mathbf{r}(t_0)] \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

In altre parole il vettore ∇f in P_0 è perpendicolare al vettore $\mathbf{r}'(t_0)$. Quindi le curve che stanno sulla superficie S e passano per P_0 hanno in P_0 vettore tangente perpendicolare al vettore $\nabla f(P_0)$. Questi vettori tangenti determinano un piano e $\nabla f(P_0)$ è normale a questo piano. Questo piano è detto piano tangente in P_0 alla superficie di livello S e consiste di tutti i punti P dello spazio soddisfacenti l'equazione

$$(P - P_0) \cdot \nabla f(P_0) = 0$$

Ovvero

$$f_x(P_0)\,(x - x_0) + f_y(P_0)\,(y - y_0) + f_z(P_0)\,(z - z_0) = 0\,.$$

Esempio 9.3

Trovare l'equazione del piano tangente all'ellissoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$ nel punto $(1,2,-1)$.

Soluzione.

Ponendo $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$, allora l'equazione data ha la forma $F(x, y, z) = 18$, che può essere vista come l'equazione di una superficie di livello per F.
Quindi, il vettore $\nabla F(1,2,-1)$ è normale all'ellissoide nel punto $(1,2,-1)$.
Per trovare questo vettore scriviamo

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathbf{k} = 2x\,\mathbf{i} + 8y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

$$\nabla F(1,2,-1) = 2\,\mathbf{i} + 16\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$$

Usando questa normale e il punto $(1,2,-1)$, otteniamo l'equazione del piano tangente

$$2(x-1) + 16(y-2) - 2(z+1) = 0$$

o

$$x + 8y - z = 18\,.$$

10. DIFFERENZIALE TOTALE

Se $w = f(x,y,z)$, allora definiamo l'**incremento** Δw come

$$\Delta w = f(x+\Delta w, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

e definiamo **differenziale totale** dw come

$$dw = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz$$

dove Δx, Δy, Δz, *dx*, *dy* e *dz* rappresentano le variazioni dei valori di *x*, *y* e *z*.
L'incremento Δw rappresenta la variazione del valore di $w = f(x,y,z)$ quando *x*, *y* e *z* variano rispettivamente di una quantità Δx, Δy e Δz.
Tuttavia, per funzioni di tre variabili, il differenziale totale dw non ha un'interpretazione geometrica naturale.
Se poniamo

$$dx = \Delta x, \; dy = \Delta y, \; dz = \Delta z$$

e se $w = f(x,y,z)$ e differenziabile in (x,y,z), allora segue dalla definizione 8.1.1 che

$$\Delta w = dw + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z \tag{3}$$

dove $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ per $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)$. Quindi, quando Δx, Δy e Δz sono piccoli, dalla (3) segue che

$$\Delta w \cong dw$$

Esempio 10.1
La lunghezza, la larghezza e l'altezza di un parallelepipedo sono state misurate con un errore del 5% circa. Trovare un limite superiore della percentuale massima di errore possibile che risulta se queste quantità sono usate per calcolare la diagonale del parallelepipedo.

Soluzione.

Siano *x*, *y*, *z* e *D* rispettivamente la vera lunghezza, larghezza, altezza e diagonale del parallelepipedo; e siano Δx, Δy, Δz e ΔD gli errori di queste quantità. Sappiamo che

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \le 0.05, \quad \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \le 0.05, \quad \left|\frac{\Delta z}{z}\right| \le 0.05$$

Vogliamo stimare $\left|\frac{\Delta d}{d}\right|$. Siccome la diagonale *D* è collegata alla lunghezza, larghezza e altezza da

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

segue che

$$dD = \frac{\partial D}{\partial x}dx + \frac{\partial D}{\partial y}dy + \frac{\partial D}{\partial z}dz =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$$

Se scegliamo $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$, allora possiamo approssimare $\Delta D/D \approx dD/D$. Ma,

$$\frac{dD}{D} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}dz$$

o

$$\frac{dD}{D} = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dx}{x} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dy}{y} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dz}{z}$$

Quindi,

$$\frac{dD}{D} = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dx}{x} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dy}{y} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dz}{z}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dx}{x}\right| + \left|\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dy}{y}\right| + \left|\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dz}{z}\right|$$

$$\leq \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}(0.05) + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}(0.05) + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}(0.05) =$$

$$= 0.05$$

Perciò la massima percentuale di errore di *D* è di circa il 5%.

11. FUNZIONI IMPLICITE

TEOREMA 11.1 (**di Dini in $\mathbb{R}^3$**)

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia F una funzione di classe $C^1(A)$. Se in $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{A}$ *risulta*

$$F(\mathrm{P}_0) = 0 \qquad e \qquad \nabla F(\mathrm{P}_0) \neq 0$$

allora esiste un intorno di P_0 nel quale l'insieme degli zeri di F è il grafico di una funzione.
In particolare se $\nabla F(\mathrm{P}_0) \neq 0 \Rightarrow F_z(\mathrm{P}_0) \neq 0$*, allora esistono un intorno U di* (x_0, y_0) *ed un intorno V di* z_0 *tali che*

$$\forall (x, y) \in \mathrm{U} \ \ \exists!\, z = f(x, y) \in \mathrm{V} \ \textit{per cui risulta} \ F(x, y, f(x, y)) = 0$$

Inoltre $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{U})$ *e*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Dimostrazione.
Per fissare le idee supponiamo $F_z(\mathrm{P}_0) > 0$, pertanto, per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno R di P_0:

$$\mathrm{R} = \mathrm{W} \times \mathrm{V} \subset \mathrm{A} \qquad \text{dove} \qquad \mathrm{W} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \quad \text{e} \quad \mathrm{V} = [z_0 - h, z_0 + h]$$

nel quale risulta $F_z(x, y, z) > 0$.
Allora per ogni (x, y) fissato in W, l'applicazione

$$z \to F(x, y, z) \qquad z \in \mathrm{V} = [\mathrm{z}_0 - h, z_0 + h]$$

è strettamente crescente in V, in particolare è strettamente crescente l'applicazione

$$z \to F(x_0, y_0, z) = g(z) \qquad z \in \mathrm{V} = [\mathrm{z}_0 - h, z_0 + h].$$

Essendo $g(z_0) = 0$, da quanto precede, segue che è

$$g(z_0 - h) < 0 \qquad \text{e} \qquad g(z_0 + h) > 0$$

ovvero

$$F(x_0, y_0, z_0 - h) < 0 \qquad \text{e} \qquad F(x_0, y_0, z_0 + h) > 0.$$

Tenuto presente che le funzioni $F(x, y, z_0 - h)$ e $F(x, y, z_0 + h)$ sono continue in W e diverse da zero in (x_0, y_0), da quanto precede e dal teorema della permanenza del segno segue che esiste un intorno U di (x_0, y_0): $\mathrm{U} = [x_0 - k, x_0 + k] \times [y_0 - k, y_0 + k] \subset \mathrm{W}$ nel quale risulta

$$F(x, y, z_0 - h) < 0 \qquad \text{e} \qquad F(x, y, z_0 + h) > 0.$$

Ne consegue che in corrispondenza di (x,y) fissato in $\mathrm{U} \subset \mathrm{W}$, la funzione $\varphi(u) = F(x,y,u)$ è continua e strettamente crescente in $\mathrm{V} = [z_0 - h, z_0 + h]$, inoltre agli estremi dell'intervallo V assume valor idi segno opposto:

$$\varphi(z_0 - h) = F(x,y,z_0 - h) < 0 \quad \text{e} \quad \varphi(z_0 + h) = F(x,y,z_0 + h) > 0$$

pertanto per il teorema di Bolzano

$$\exists!\ z = f(x,y) \in \mathrm{V} \qquad \text{tale che} \qquad \varphi(\mathrm{z}) = F(x,y,z) = F(x,y,f(x,y)) = 0\,.$$

In altre parole l'insieme degli zeri della restrizione di F all'intorno $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ è il grafico di una funzione $z = f(x,y)$.

Per dimostrare che la funzione $f(x,y)$, precedentemente definita, è continua in U, si osservi che

$$(x,y) \in \mathrm{U} \quad \text{e} \quad (x_1,y_1) \in \mathrm{U} \ \Rightarrow\ F(x,y,f(x,y)) = F(x_1,y_1,f(x_1,y_1)) = 0.$$

Tenuto presente che per il teorema del valor medio esiste $\mathrm{P}^* = (\zeta, \eta, f(\zeta,\eta))$ interno al segmento di estremi $\mathrm{P} = (x,y,f(x,y))$ e $\mathrm{P}_1 = (x_1,y_1,f(x_1,y_1))$ tale che

$$F(\mathrm{P}) - F(\mathrm{P}_1) = \langle \nabla F(\mathrm{P}^*), \mathrm{P} - \mathrm{P}_1 \rangle$$

si deduce che

$$F_x(\mathrm{P}^*)(x - x_1) + F_y(\mathrm{P}^*)(y - y_1) + F_z(\mathrm{P}^*)(f(x,y) - f(x_1,y_1)) = 0\,.$$

Da cui essendo (giustificare!)

$$|f(x,y) - f(x_1,y_1)| \le \frac{Max|F_x|}{Min|F_z|}|x - x_1| + \frac{Max|F_y|}{Min|F_z|}|y - y_1|$$

si deduce che $f(x,y)$ è continua in (x_1,y_1) e quindi in U.

Infine, preso $\mathrm{P} = (x,y_1,f(x,y_1))$, da $\langle \nabla F(\mathrm{P}^*), \mathrm{P} - \mathrm{P}_1 \rangle$=0 si ottiene

$$\frac{f(x,y_1) - f(x_1,y_1)}{x - x_1} = -\frac{F_x(\mathrm{P}^*)}{F_z(\mathrm{P}^*)}$$

da cui osservato che

$$x \to x_1 \ \Rightarrow\ \mathrm{P} \to \mathrm{P}_1 \ \Rightarrow\ \mathrm{P}^* \to \mathrm{P}_1$$

e che le funzioni F_x e F_z sono continue,si evince che

$$\lim_{x \to x1} \frac{f(x,y_1) - f(x_1,y_1)}{x - x_1} = -\frac{F_x(\mathrm{P}_1)}{F_z(\mathrm{P}_1)}$$

ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1) = -\frac{F_x}{F_z}(\mathrm{P}_1)\,.$$

Analogamente si dimostra che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) = -\frac{F_y}{F_z}(\mathrm{P}_1).$$

Si osservi che le derivate parziali di *f*, ammessa l'esistenza, si deducono applicando il teorema di derivazione composta all'equazione $F(x, y, f(x, y)) = 0$, ovvero dalle relazioni

$$F_x + F_z \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{e} \qquad F_y + F_z \frac{\partial f}{\partial y} = 0 .$$

Inoltre si osservi che

a) se $\nabla F(\mathrm{P}_0) \neq 0 \Rightarrow F_y(P_0) \neq 0$, allora esistono un intorno U di (x_0, z_0) ed un intorno V di y_0 tali che

$$\forall (x, z) \in \mathrm{U} \ \exists ! \ y = f(x, z) \in \mathrm{V} \quad \text{per cui risulta} \quad F(x, f(x, z), z) = 0$$

f è di classe $C^1(U)$ e le derivate parziali di *f*, ammessa l'esistenza, si deducono applicando il teorema di derivazione composta all'equazione $F(x, f(x, z), z) = 0$, ovvero dalle relazioni

$$F_x + F_y \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{e} \qquad F_z + F_y \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

b) se $\nabla F(\mathrm{P}_0) \neq 0 \Rightarrow F_x(P_0) \neq 0$, allora esistono un intorno U di (y_0, z_0) ed un intorno V di x_0 tali che

$$\forall (y, z) \in \mathrm{U} \ \exists ! \ x = f(y, z) \in \mathrm{V} \quad \text{per cui risulta} \quad F(f(y, z), y, z) = 0$$

f è di classe $C^1(U)$ e le derivate parziali di *f*, ammessa l'esistenza, si deducono applicando il teorema di derivazione composta all'equazione $F(f(y, z), y, z) = 0$, ovvero dalle relazioni

$$F_y + F_x \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{e} \qquad F_z + F_x \frac{\partial f}{\partial z} = 0 .$$

Si osservi che se *F* è di classe $C^2(U)$ allora *f* è di classe $C^2(U)$ inoltre risulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(F_z)^3}\left[(F_x)^2 F_{zz} - 2F_{xz}F_xF_z + (F_z)^2 F_{xx}\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{(F_z)^3}\left[(F_y)^2 F_{zz} - 2F_{yz}F_yF_z + (F_z)^2 F_{yy}\right].$$

Analogamente si dimostra il seguente

TEOREMA 11.2 (**di Dini in $\mathbb{R}^2$**)

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ *e sia F una funzione di classe* $C^1(A)$. *Se in* $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{A}$ *risulta*

$$F(\mathrm{P}_0) = 0 \qquad e \qquad \nabla F(\mathrm{P}_0) \neq 0$$

allora esiste un intorno di P_0 *nel quale l'insieme degli zeri di F è il grafico di una funzione.*
In particolare se $\nabla F(\mathrm{P}_0) \neq 0 \Rightarrow F_y(\mathrm{P}_0) \neq 0$, *allora esistono un intorno U di* x_0 *ed un intorno V di* y_0 *tali che*

$$\forall x \in \mathrm{U} \quad \exists!\ y = f(x) \in \mathrm{V} \quad \textit{per cui risulta} \quad F(x, f(x)) = 0 .$$

Inoltre $f \in C^1(U)$ *e*

$$f'(x) = -\frac{F_x(\mathrm{P})}{F_y(\mathrm{P})} \quad \textit{dove} \quad \mathrm{P} = (x, f(x)).$$

La derivata di *f*, si deduce applicando il teorema di derivazione composta all'equazione $F(x, f(x)) = 0$, ovvero dalla relazione

$$F_x(\mathrm{P}) + F_y(\mathrm{P}) f'(x) = 0 .$$

Se $\nabla F(\mathrm{P}_0) \neq 0 \Rightarrow F_x(\mathrm{P}_0) \neq 0$, allora esistono un intorno U di y_0 ed un intorno V di x_0 tali che

$$\forall y \in \mathrm{U} \quad \exists!\ x = f(y) \in \mathrm{V} \quad \text{per cui risulta} \quad F(f(x), y) = 0 .$$

Inoltre $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{U})$ e la derivata di f, ammessa l'esistenza, si deduce applicando il teorema di derivazione composta all'equazione $F(x, f(x)) = 0$, ovvero alla relazione

$$F_x(\mathrm{P}) f'(y) + F_y(\mathrm{P}) = 0 .$$

Un'applicazione importante del teorema di **Dini** per le funzioni implicite, è quella relativa alla ricerca di condizioni sufficienti affinché un sistema di equazioni qualsiasi definisca (in un intorno di un punto che lo soddisfa) alcune incognite che in esso compaiono in funzione delle altre. Per fissare le idee consideriamo il caso più semplice cioè quello di un sistema della forma

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

TEOREMA 11.3

Siano A un aperto di $\mathbb{R}^3$, *F e G due funzioni di classe* $C^1(A)$. *Se in* $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0 . z_0) \in \mathrm{A}$ *risulta*

$$F(\mathrm{P}_0) = 0 \quad , \quad G(\mathrm{P}_0) = 0$$

e

$$\nabla F(\mathrm{P}) \wedge \nabla G(\mathrm{P}) = \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right) \neq 0$$

Allora esiste un intorno di P_0 *nel quale l'insieme degli zeri comuni di F e G è la traiettoria descritta da una curva regolare. In particolare se la condizione* $\nabla F(\mathrm{P}_0) \wedge \nabla F(\mathrm{P}_0) \neq 0$ *implica*

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix} F_y(\mathrm{P}_0) & F_z(\mathrm{P}_0) \\ G_y(\mathrm{P}_0) & \mathrm{G}_z(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix}=\left(F_yG_z-F_zG_y\right)(\mathrm{P}_0)\neq 0$$

allora esiste una curva regolare $\boldsymbol{\alpha}(x)=(x,y(x),z(x))$, *definita in un intorno di* x_0 *tale che*

$$F(x,y(x),z(x))=0 \quad e \quad G(x,y(x),z(x))=0\,.$$

Dimostrazione.
Osservato che

$$\left(F_yG_z-F_zG_y\right)(\mathrm{P}_0)\neq 0 \;\Rightarrow\; F_z(\mathrm{P}_0)\neq 0 \quad \text{oppure} \quad G_z(\mathrm{P}_0)\neq 0\,,$$

è lecito supporre $F_z(\mathrm{P}_0)\neq 0$.
Essendo $F(\mathrm{P}_0)=0$ e $F_z(\mathrm{P}_0)\neq 0$, per il teorema di **Dini**, esiste un intorno di P_0

$$\mathrm{U}\times\mathrm{V}\subset\mathrm{A} \quad \text{dove} \quad \mathrm{U}=[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta] \quad \text{e} \quad \mathrm{V}=[z_0-h,z_0+h]$$

tali che

$$\forall(x,y)\in\mathrm{U}\;\;\exists!\;\; z=f(x,y)\in\mathrm{V} \quad \text{per cui risulta} \quad F(x,y,f(x,y))=0\,.$$

Inoltre F è di classe C^1(U) ed in particolare è

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{F_y(\mathrm{P}_0)}{F_z(\mathrm{P}_0)}$$

Sia

$$g(x,y)=G(x,y,f(x,y)) \quad \forall(x,y)\in\mathrm{U}\,.$$

Essendo

$$g(x_0,y_0)=G(x_0,y_0,f(x_0,y_0))=G(\mathrm{P}_0)=0$$

$$g_y(x_0,y_0)=-\frac{1}{F_z(\mathrm{P}_0)}\left(F_yG_z-F_zG_y\right)(\mathrm{P}_0)\neq 0$$

segue che la funzione $g(x,y)$ soddisfa le ipotesi del teorema di **Dini**, pertanto esiste un intorno U' di (x_0,y_0): U'$=[x_0-\delta',x_0+\delta']\times[y_0-k,y_0+k]\subset\mathrm{U}$ tale che per ogni $x\in[x_0-\delta',x_0+\delta']$ esiste un unico valore di $y=y(x)\in[y_0-k,y_0+k]$ per il quale, posto $z(x)=f(x,y(x))$, risulta

$$g(x,y(x))=G(x,y(x),z(x))=0\,.$$

Inoltre y è di classe C^1. Quindi nei punti della curva regolare

$$\boldsymbol{\alpha}(x)=(x,y(x),z(x)) \quad x\in[x_0-k,x_0+k]$$

risulta

$$F(x,y(x),z(x))=0 \quad \text{e} \quad G(x,y(x),z(x))=0\,.$$

Ovviamente il vettore

$$\nabla F(\mathrm{P}) \wedge \nabla G(\mathrm{P}) = \left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right)$$

è tangente ad $\boldsymbol{\alpha}(x)$ in $\mathrm{P} = (x, y(x), z(x))$. Pertanto

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

è l'equazione della retta tangente alla curva $\boldsymbol{\alpha}(x)$ in $\mathrm{P}_0 = (x_0, y(x_0), z(x_0)) = (x_0, y_0, z_0)$;

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x - x_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(y - y_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(z - z_0) = 0$$

è l'equazione del piano normale alla curva $\boldsymbol{\alpha}(x)$ in $\mathrm{P}_0 = (x_0, y(x_0), z(x_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ cioè del piano normale alla retta tangente ad $\boldsymbol{\alpha}(x)$ in P_0.

Si osservi che la derivata $y'(x)$ e $z'(x)$, ammessa l'esistenza, si deducono applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte alle equazioni

$$F(x, y(x), z(x)) = 0 \quad \text{e} \quad G(x, y(x), z(x)) = 0$$

ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} F_x + F_y y' + F_z z' &= 0 \\ G_x + F_y y' + G_z z' &= 0. \end{aligned}$$

Inoltre si osservi che:

a) se la condizione $\nabla F(\mathrm{P}_0) \wedge \nabla G(\mathrm{P}_0) \neq 0$ implica

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = (F_z G_x - F_x G_z) \neq 0$$

allora esiste una curva regolare $\boldsymbol{\beta}(y) = (x(y), y, z(y))$, definita in un intorno di y_0, tale che

$$F(x(y), y, z(y)) = 0 \quad \text{e} \quad G(x(y), y, z(y)) = 0.$$

b) se la condizione $\nabla F(\mathrm{P}_0) \wedge \nabla G(\mathrm{P}_0) \neq 0$ implica

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = (F_x G_y - F_y G_x) \neq 0$$

allora esiste una curva regolare $\boldsymbol{\gamma}(z) = (x(z), y(z), z)$, definita in un intorno di z_0, tale che

$$F(x(z), y(z), z) = 0 \quad \text{e} \quad G(x(z), y(z), z) = 0.$$

TEOREMA 11.4 (**delle funzioni implicite**)**:** un caso particolare

Consideriamo il sistema (di due equazioni e quattro incognite)

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \tag{1}$$

Dove le funzioni F e G sono definite in un aperto Ω CIR^4 che include il punto (x_0, y_0, u_0, v_0) per il quale

$$F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 \text{ e } G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0.$$

Se F e G sono di classe $C^{(1)}$ in un intorno del punto (x_0, y_0, u_0, v_0) e se nel punto (x_0, y_0, u_0, v_0) risulta

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \neq 0 \tag{2}$$

allora nel suddetto intorno esiste un intorno di (x_0, y_0, u_0, v_0) nel quale il sistema (1) può essere risolto rispetto ad x e y.
Le funzioni $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ soluzioni del sistema (1), in un opportuno intorno di (u_0, v_0) sono di classe $C^{(1)}$ e risulta (*vedi osservazione seguente*)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} \tag{3}$$

Osservazione
Nelle espressioni precedenti il denominatore è lo jacobiano di F e G rispetto alle variabili dipendenti x e y; il numeratore è lo jacobiano che si ottiene da quello del denominatore sostituendo la variabile indipendente che si deriva con la variabile rispetto alla quale si sta derivando.

Derivando il sistema (1) rispetto ad u e v, supponendo $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$, si evince

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \qquad \text{da cui} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \tag{4}$$

Se si suppone che il sistema (1) sia risolvibile rispetto ad u e v in funzione di x e y allora

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}. \qquad (*)$$

In particolare se il sistema

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} F(x,y,u,v) = x - x(u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = y - y(u,v) = 0 \end{cases}$$

è risolvibile rispetto ad u e v in funzione di x e y, allora tenuto presente che

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

dalla (*) si evince

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} \qquad \text{quindi} \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

Osservazione
Derivando il sistema (1) rispetto ad u e v (variabili indipendenti) si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{\partial F}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{\partial G}{\partial u} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial u} \\[2ex] -\dfrac{\partial G}{\partial u} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{\partial F}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{\partial G}{\partial v} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial v} \\[2ex] -\dfrac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}$$

L'equazione matriciale precedente, passando ai determinanti, definisce la (4).

Si osservi che le (3) si ottengono risolvendo i sistemi precedenti con la regola di Kramer.

12. TRASFORMAZIONI INVERTIBILI DA $\Re^2$ IN $\Re^2$

Siano $z = G(y)$ e $y = F(x)$ due applicazioni da $\Re^2$ in $\Re^2$ dove $z = (z_1, z_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e $x = (x_1, x_2)$ con

$$\begin{cases} z_1 = g_1(y_1, y_2) \\ z_2 = g_2(y_1, y_2) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}.$$

Supponiamo che $(x_1, x_2) \in DomF \Rightarrow (y_1, y_2) \in DomG$ e che F e G siano di classe $C^{(1)}$. Allora $z = G[F(x)]$ ovvero

$$\begin{cases} z_1 = g_1[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)] \\ z_2 = g_2[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)] \end{cases}$$

e il teorema di derivazione delle funzioni composte fornisce le relazioni

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}; \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2};$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_1} = \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}; \qquad \frac{\partial z_2}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}.$$

Le relazioni precedenti sono equivalenti all'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

da cui, tenuto presente che è $g_1(y_1, y_2) = z_1$ e $g_2(y_1, y_2) = z_2$, si ottiene

$$\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(y_1, y_2)}\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

Se F è invertibile e G l'inversa di F allora $z = G[F(x)] = x$ cioè

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 \end{cases}$$

allora

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 1$$

In questo caso risulta

$$1 = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(y_1, y_2)} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}$$

da cui

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}} .$$

Si dimostra che **il non annullarsi del determinante**

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}$$

è condizione necessaria e sufficiente per garantire l'invertibilità del sistema

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$