

## Numeri complessi

Si dice numero complesso  $z$  un'espressione della forma

$$z = x + j y$$

(detta forma algebrica del numero complesso  $z$ ) dove  $x$  e  $y$  sono numeri reali chiamati rispettivamente parte reale e parte immaginaria del numero complesso e si indicano con:

$$x = \operatorname{Re}\{z\} \quad , \quad y = \operatorname{Im}\{z\}$$

$j$  è il simbolo dell'unità immaginaria che soddisfa la condizione

$$(j)^2 = -1$$

Il numero complesso

$$\bar{z} = x - j y$$

è il coniugato di

$$z = x + j y$$

Due numeri complessi

$$z_1 = x_1 + j y_1 \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + j y_2$$

sono uguali se e solo se  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$  ovvero se e solo se

$$\operatorname{Re}\{z_1\} = \operatorname{Re}\{z_2\} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\{z_1\} = \operatorname{Im}\{z_2\}$$

Pertanto un numero complesso  $z$  è uguale al suo complesso coniugato  $\bar{z}$  se e solo se  $z$  è un numero reale.

Un numero complesso  $z = x + j y$  è rappresentato nel piano XOY da un punto P di coordinate (x,y) o da un vettore la cui origine si trova nel punto O(0,0), il cui estremo nel punto P(x,y).

La lunghezza  $\rho$  del vettore (P-0) è chiamata modulo del numero complesso e si indica con  $|z|$ :

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Da cui

$$|\operatorname{Re}\{z\}| = |x| \leq |z|; \quad |\operatorname{Im}\{z\}| = |y| \leq |z|.$$

L'angolo  $\theta$  che il vettore (P-0) forma con la direzione positiva dell'asse X è chiamato argomento del numero complesso e si indica con  $\theta = \operatorname{Arg} z$ ; l'argomento di un numero complesso è determinato in modo non univoco, cioè a meno di multipli interi di  $2\pi$ :

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dove  $\arg z$  è il valore principale di  $\operatorname{Arg} z$  definito dalle condizioni:

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

tali che:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

valgono le seguenti condizioni

$$\tan(\text{Arg } z) = \frac{y}{x}, \quad \sin(\text{Arg } z) = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos(\text{Arg } z) = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e se i loro argomenti sono uguali oppure differiscono per multipli interi di  $2\pi$  :

$$|z_1| = |z_2|, \quad \text{Arg } z_1 = \text{Arg } z_2 + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Siano dati due numeri complessi  $z_1 = x_1 + jy_1$  e  $z_2 = x_2 + jy_2$

La somma dei due numeri complessi dati è il numero complesso

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2);$$

La differenza dei due numeri complessi dati è il numero complesso

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2);$$

il prodotto dei due numeri complessi dati è il numero complesso

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

da cui

$$\bar{z} z = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

Si dice quoziente della divisione del numero complesso  $z_1$  per un numero complesso  $z_2 \neq 0$  un numero complesso  $z$  tale che l'equazione  $z_1 = z_2 z$  sia soddisfatta; vale la formula

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|\bar{z}_2|^2}$$

In particolare è

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

La parte reale  $\text{Re}\{z\}$  e quella immaginaria  $\text{Im}\{z\}$  del numero complesso  $z$  si esprimono mediante i numeri complessi coniugati nel modo seguente:

$$\text{Re}\{z\} = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \text{Im}\{z\} = j \frac{\bar{z} - z}{2} = \frac{z - \bar{z}}{2j}$$

Non è difficile dimostrare che

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

Dimostriamo che  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

Infatti è

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Poiché i moduli sono non negativi, il risultato segue prendendo le radici quadrate di ambo i membri.

Dimostriamo ora la disuguaglianza triangolare:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = \\ &|z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}\{z_1\bar{z}_2\} \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| = \\ &|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Il risultato precedente può essere esteso, per induzione, per dimostrare che

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$$

Se nella disuguaglianza si sostituisce  $z_1$  con  $z_1 - z_2$  si ottiene

$$|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

da cui  $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Ogni numero complesso  $z = x + jy$  ( $z \neq 0$ ) ammette la rappresentazione trigonometrica

$$z = \rho_1(\cos \theta + j \sin \theta) \quad \text{dove} \quad \rho_2 = |z|, \quad \theta = \operatorname{Arg} z$$

Supponiamo che i due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  siano dati in forma trigonometrica:

$$z_1 = \rho(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1), \quad z_2 = \rho(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$$

Allora

$$i) z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Cioè moltiplicando due numeri complessi i loro moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 ;$$

$$\text{ii) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

da cui

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2$$

L'elevazione di un numero complesso

$$z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$$

Alla potenza *n*-esima è data dalla formula

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)]$$

Cioè

$$|z^n| = |z|^n, \quad \text{Arg } z^n = n \text{Arg } z + 2k\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Segue dalla formula di Moivre

$$(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta)$$

da cui

$$(\cos \theta + j \sin \theta)^{-n} = (\cos \theta - j \sin \theta)^n = \cos(n\theta) - j \sin(n\theta)$$

Se definiamo  $e^{j\theta}$  come segue

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

da quanto precede si deduce che ogni numero complesso  $z \neq 0$  può essere scritto in forma esponenziale

$$z = \rho e^{j\theta} \quad \text{dove } \rho = |z| \quad \text{e } \theta = \text{Arg } z$$

## Radici $n$ -esime

Sia  $z$  un numero complesso diverso da 0 :

$$z = \rho e^{j\theta} \quad \text{dove } \rho = |z| \quad \text{e } \theta = \text{Arg } z$$

Allora le  $n$  soluzioni dell'equazione

$$w^n = z$$

Sono per definizione le radici  $n$ -esime del numero complesso  $z$ .

Se scriviamo  $w$  in forma esponenziale :

$$w = r e^{j\alpha} \quad \text{dove } r = |w| \quad \text{e } \alpha = \text{Arg } w$$

l'equazione precedente diventa

$$r^n e^{jn\alpha} = \rho e^{j\theta}$$

da cui

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dove si è tenuto presente che due numeri complessi sono uguali se e solo se i loro moduli sono uguali ( $r^n = \rho$ ) e i loro argomenti differiscono per multipli interi di  $2\pi$  ( $n\alpha - \theta = 2k\pi$   $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).



Quindi tutte le radici  $n$ -esime di  $z = \rho e^{j\theta}$  sono date da

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{j\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Poiché l'equazione precedente, per  $k = m + n$  dà lo stesso risultato di  $k = m$ , basta prendere  $n$  valori consecutivi di  $k$  per ottenere le  $n$  differenti radici  $n$ -esime; per comodità si sceglie  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

I punti corrispondenti ai valori di  $\sqrt[n]{z}$ , costituiscono i vertici di un poligono regolare di  $n$  lati inscritto in una circonferenza di raggio  $r = \sqrt[n]{\rho}$  con centro nell'origine delle coordinate.

La radice  $n$ -esima di un numero reale  $a$  possiede anche  $n$  valori distinti, di cui ne esistono due, uno o nessun valore reale a seconda della parità/disparità del numero  $n$  e del segno di  $a$ .

# funzioni di una variabile complessa

## Limiti e continuità

Indicata con  $z = x + jy$  una variabile complessa, abbiamo visto che i suoi valori si rappresentano con i punti  $P(x,y)$  in un piano dove sia stato fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali  $x,y$  (piano complesso). Sia dato su tale piano un aperto  $\Omega$  (limitato o meno) ed esiste una legge, che faccia corrispondere ad ogni punto  $z$  di  $\Omega$  un numero complesso  $w$ . Diremo allora che  $w$  è una funzione dalla variabile complessa  $z$  definita su  $\Omega$  e scriveremo

$$w = f(z) \quad z \in \Omega$$

Resta inteso che, almeno per ora, ad ogni  $z \in \Omega$  corrisponde uno ed un solo valore  $w$ , cioè che la funzione sia ad un sol valore o, come anche si dice, monodroma.

Successivamente parleremo anche di funzioni a più valori o ploidrome.

È evidente che una funzione  $w = f(z)$  equivale ad una funzione complessa delle due variabili reali  $x$  e  $y$ ; perciò in luogo di  $w = f(z)$  scriveremo anche  $w = f(x, y)$ .

Posto poi  $w = u + jv$  con  $u$  e  $v$  reali, la funzione  $w = f(z)$

può identificarsi con la seguente coppia ordinata di funzioni reali delle due variabili  $x$  e  $y$ :

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y)$$

dove  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  e  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ .

Il concetto di limite per una funzione  $w = f(z)$  discende immediatamente dal considerare  $w$  come una funzione delle due variabili reali  $x$  e  $y$ . Pertanto se  $z_0$  è un punto di accumulazione di  $\Omega$  diremo che:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L = A + jB$$

quando, comunque si prefissi  $\varepsilon > 0$ , esiste in corrispondenza ad esso un numero

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tale che, per tutti i punti  $z$  di  $\Omega$  per i quali sia verificata la relazione

$0 < |z - z_0| < \delta$ , risulti

$$|f(z) - L| < \varepsilon.$$

Per quanto riguarda il concetto di continuità,  $f(z)$  è continua nel punto  $z_0$  di  $\Omega$  quindi si ha:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0);$$

dire che  $f(z)$  è continua in  $\Omega$  significa che lo è in ogni punto di  $\Omega$ .

In altre parole, una funzione  $f(z)$  definita in un aperto  $\Omega$  è continua se per ogni  $z_0 \in \Omega$  e per ogni numero  $\varepsilon > 0$  si può trovare un numero  $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$  tale che per tutti i punti  $z$  di  $\Omega$  che verificano la relazione  $|z - z_0| < \delta$ , vale la disuguaglianza

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Non è difficile verificare che una funzione di una variabile complessa

$$f(z) = u(x, y) + j v(x, y) \quad z \in \Omega$$

è continua in  $z_0 = x_0 + jy_0 \in \Omega$ , se e solo se le funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  siano continue nel punto  $(x_0, y_0)$ .

Infine dati i limiti

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad ; \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$$

risulta

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = AB$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad B \neq 0$$

## Il piano complesso dotato di punto all'infinito (sfera complessa)

Sia  $f(z)$  una funzione definita in un dato aperto connesso  $\Omega$ . Se  $\Omega$  è illimitato si presenta in modo naturale la questione di studiare il comportamento di  $f(z)$  quando il punto  $z$ , variando in  $\Omega$  si allontana indefinitamente. Per un tale studio consideriamo la sfera che ha centro nell'origine  $O$  e raggio 1 e diciamo  $N$  il punto in cui essa interseca il semiasse positivo  $u$ . Se  $P$  è un punto qualsiasi del piano  $(x,y)$ , la retta per  $N$  e  $P$  incontra ulteriormente la sfera in uno ed un solo punto  $P'$  diverso da  $N$ .

Viceversa, preso un punto  $P'$  della sfera diverso da  $N$ , la retta  $NP'$  incontra il piano  $(x,y)$  in uno ed un solo punto  $P$ . Nasce così una corrispondenza biunivoca fra i punti  $P$  del piano  $(x,y)$  ed i punti  $P'$  della sfera, con un'unica eccezione: il punto  $N$  della sfera non ha una corrispondente sul piano  $(x,y)$ .

Ne deriva, pensando  $P$  come immagine di un numero complesso  $z$ , che la totalità dei numeri complessi può anche essere rappresentata dai punti della sfera predetta privata del punto  $N$ .

Allo scopo di eliminare quest'eccezione, possiamo osservare che ai punti  $P'$  della sfera vicinissimi a  $N$  corrispondono punti  $P$  del piano molto lontani dall'origine, cioè numeri complessi  $z$  di modulo grandissimo; da quest'osservazione risulta ovviamente l'opportunità di far corrispondere al punto  $N$  della sfera il valore  $\infty$  della variabile complessa  $z$ .

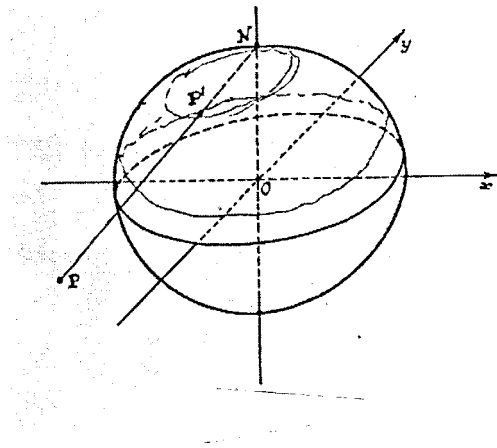
Perciò d'ora in poi penseremo aggiunto al piano complesso un unico punto all'infinito da pensarsi come immagine di  $z=\infty$ ; per questa sfera si usa il termine sfera complessa.

In tale rappresentazione il numero  $z=\infty$  ha come immagine il punto  $N$  ed ogni calotta sferica (aperta) contenente  $N$  è per definizione un intorno circolare di  $z=\infty$

Passando al piano complesso, a tale calotta corrisponde pertanto costituito dai punti esterni da un cerchio, pertanto nel piano complesso un intorno circolare di  $z=\infty$  è l'aperto costituito dai punti esterni ad un qualsiasi cerchio.

Questi intorni circolari di  $z=\infty$ , considerati nel piano complessi senza punto all'infinito, sono campi non semplicemente connessi; considerati invece nel piano complesso con punto all'infinito risultano essere semplicemente connessi (come gli intorni circolari di qualsiasi altro punto). Ci si convince subito di ciò pensando alle

corrispondenti immagini sulla sfera complessa.



## 1 Funzione Esponenziale

La funzione esponenziale complessa è definita dall'equazione

$$w = e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y)$$

da cui tenuto presente che:

$$\cos y + j \sin y = \cos(y + 2k\pi) + j \sin(y + 2k\pi) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

segue che:

$$e^z = e^{z+2k\pi j}$$

così che la funzione esponenziale  $e^z$  è periodica ed ha periodo  $2\pi j$ ; in altre parole ogni valore che la funzione  $e^z$  può assumere è assunto nella striscia infinita  $-\pi < y \leq \pi$  o in qualsiasi altra striscia ottenibile da questa per traslazione parallela.

Da quanto precede segue che le soluzioni delle equazioni:

$$e^z = 1 \quad e^z = -1$$

sono rispettivamente:  $z = 2k\pi j$  e  $z = (2k+1)\pi j$   $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

## 2 Funzioni trigonometriche

Le definizioni di seno e coseno sono estese al piano complesso nel modo seguente:

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$

Essendo

$$\sin z = \frac{1}{2j} (e^{jx-y} - e^{-jx+y}) = \cosh y \sin x + j \sinh y \cos x$$

segue che:

$$|\sin z| = \sqrt{\cos^2 x \sinh^2 y + \sin^2 x \cosh^2 y} = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

Dalla relazione precedente si evince che la funzione  $\sin z$  non è limitata a meno che  $z$  non sia reale. Analogamente si deduce che  $\cos z$  non è limitata. Non è difficile dimostrare le identità fondamentali:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad (1)$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \quad (2)$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2 \quad (3)$$

Tutte le identità elementari della trigonometria valgono anche per le funzioni trigonometriche di una variabile complessa e si deducono algebricamente dalle relazioni (1), (2) e (3) precedenti.

Per esempio ponendo  $z_1 = z_2 = z$  nella (2) e (3) si ottengono rispettivamente le identità:

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

Si osservi che:

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{2jz} = 1 \Leftrightarrow 2jz = 2k\pi j \Leftrightarrow z = k\pi$$

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{2jz} = -1 \Leftrightarrow 2jz = (2k+1)\pi j \Leftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

dove  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

### 3 Funzioni iperboliche

Le funzioni iperboliche di una variabile complessa sono definite allo stesso modo come per le variabili reali:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned} \cosh z &= \cos jz, & \cosh jz &= \cos z \\ \sinh z &= -\sin jz, & \sinh jz &= j \sin z \end{aligned}$$

e che valgono le seguenti identità

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$

In particolare è:

$$\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z \qquad \cosh 2z = 2 \sinh z \cosh z$$

Da cui:

$$\sinh^2 z = \frac{\cosh 2z - 1}{2} \qquad \cosh^2 z = \frac{\cosh 2z + 1}{2}$$

Si osservi che:

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow \cos jz = 0 \Leftrightarrow jz = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z = -(2k+1)\frac{\pi}{2} j$$

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow \sin jz = 0 \Leftrightarrow jz = k\pi \Leftrightarrow z = -k\pi j$$

Da cui, tenendo presente che  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , si evince che:

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2} j \quad ; \quad \sinh z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi j$$



## 4 Funzione logaritmo

Se  $z$  è un numero complesso diverso da zero, il logaritmo complesso di  $z$  è il numero complesso  $w$  che soddisfa la relazione:

$$w = \text{Ln } z \Leftrightarrow z = e^w$$

Sia  $w = u + jv$  e scriviamo  $z$  in forma trigonometrica:  $z = r e^{j\vartheta}$  dove  $\vartheta = \arg z \in (-\pi; \pi]$  e

$$r = |z|$$

Allora:

$$z = e^w = e^{u+jv} \Leftrightarrow r e^{j\vartheta} = e^u e^{jv} \Leftrightarrow r = e^u \quad \text{e} \quad v = \vartheta + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Da  $r = e^u$  se e solo se  $u = \ln r = \ln |z|$  segue che:

$$z = e^w \Leftrightarrow w = \ln |z| + j(\vartheta + 2k\pi) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pertanto la funzione

$$w = \text{Ln } z = \ln |z| + j(\vartheta + 2k\pi) \quad \vartheta = \arg z \in (-\pi, \pi]$$

è una funzione ad infiniti valori. In altre parole:

supponiamo di partire da un punto  $z \neq 0$  per il quale  $|z| = r$  e  $\vartheta = \arg z \in (-\pi; \pi]$ , allora

$$\text{Ln } z = \ln |z| + j \arg z = \ln z$$

Dopo aver compiuto nel verso positivo (antiorario) un giro completo intorno all'origine, ritornando in  $z$  risulta  $|z| = r$  e  $\vartheta = \arg z + 2\pi$  per cui

$$\text{Ln } z = \ln |z| + j(\arg z + 2\pi).$$

Dopo  $k$  giri intorno all'origine si ha:

$$\text{Ln } z = \ln |z| + j(\arg z + 2k\pi).$$

Poiché gli infiniti valori di  $\ln z$  si ottengono compiendo giri successivi intorno all'origine si dice che  $z = 0$  è un punto di diramazione e che ognuna delle infinite funzioni (ad un solo valore)

$$w = \ln |z| + j(\vartheta + 2k\pi) \quad \vartheta = \arg z \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

è un ramo di  $w = \text{Ln} z$

Il ramo corrispondente a  $\text{Ln} z = \ln z$  cioè

$$\text{Ln} z = \ln z = \ln |z| + j\vartheta \quad \vartheta = \arg z \in (-\pi, \pi]$$

è detto ramo principale.

### Esempio.

$$\text{Ln} j = \ln |j| + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\ln j = \ln |j| + j\frac{\pi}{2} = j\frac{\pi}{2}$$

$$\ln(-1) = \ln 1 + j(\pi + 2k\pi) = j(\pi + 2k\pi)$$

$$\ln(-1) = j\pi$$

Sono valide le relazioni:

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln} z_1 + \text{Ln} z_2 \quad e \quad \text{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Ln} z_1 - \text{Ln} z_2$$

## 5 Funzione Potenza

Se  $z$  e  $w$  sono due numeri complessi qualsiasi con  $w \neq 0$ , chiamiamo valore principale delle potenze  $w^z$ , il numero univocamente determinato dall'equazione:

$$w^z = e^{z \ln w}$$

dove  $\text{Ln } w$  è il valore principale di  $\text{Ln } w$ . Scegliendo altri valori di  $\text{Ln } w$  si ottengono altri valori della potenza, che sono tutti contenuti nella formula

$$w^z = e^{z(\text{Ln } w + 2k\pi j)} = e^{z \text{Ln } w}$$

In particolare  $j^j$  denota infiniti numeri reali:

$$j^j = e^{j(\text{Ln } j + 2k\pi j)} = e^{j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi j\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

la cui parte principale è  $e^{-\frac{\pi}{2}}$

## 6 Funzione $w = \sqrt[k]{z}$

Per semplicità limitiamo le nostre considerazioni alla funzione

$$w = \sqrt{z}$$

Scrivendo  $z$  in forma trigonometrica:  $z = r e^{j\vartheta}$   $r = |z|$   $\vartheta = \arg z$  si ottiene

$$w = \sqrt{r} e^{j\frac{\vartheta}{2}} \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi$$

Se a partire dal punto  $z$  si compie un giro completo in senso antiorario attorno all'origine alla fine del giro si ottiene

$$w_1 = \sqrt{r} e^{j\frac{(\vartheta+2\pi)}{2}} = \sqrt{r} e^{j\left(\frac{\vartheta}{2} + \pi\right)} = -\sqrt{r} e^{j\frac{\vartheta}{2}} \neq w$$

Se si compie un giro completo in senso antiorario attorno all'origine una seconda volta, alla fine del secondo giro otteniamo il valore iniziale

$$w_2 = \sqrt{r} e^{j\frac{(\vartheta+4\pi)}{2}} = \sqrt{r} e^{j\left(\frac{\vartheta}{2} + 2\pi\right)} = \sqrt{r} e^{j\frac{\vartheta}{2}} = w$$

Pertanto il punto  $z = 0$  è un punto di diramazione della funzione  $w = \sqrt{z}$  e poiché dopo due giri completi si ritrova il primo valore (dopo di che il ciclo si ripete), ne consegue che  $w = \sqrt{z}$  è una funzione a due valori e i rami corrispondenti sono

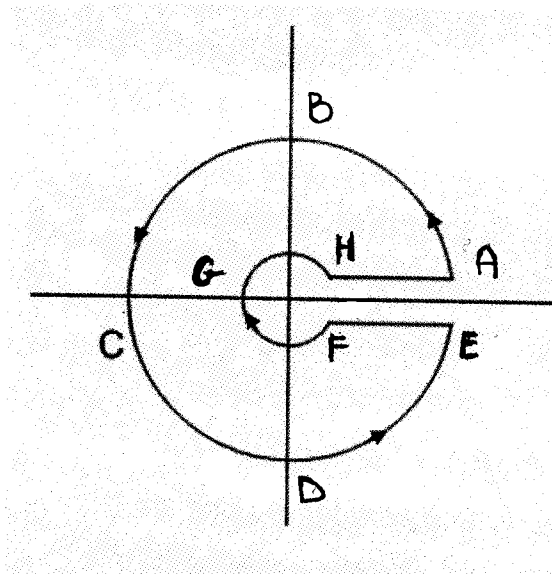
$$w = \sqrt{r} e^{j\frac{\vartheta}{2}} \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi$$

che corrisponde al ramo principale e

$$w = \sqrt{r} e^{j(\frac{\vartheta}{2} + \pi)} \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi \quad \text{oppure} \quad w = -\sqrt{r} e^{j\frac{\vartheta}{2}} \quad 2\pi \leq \vartheta < 4\pi.$$

Se  $w = f(z)$  è una funzione a più valori (ovvero rappresenta più funzioni) e si vuole considerare una singola funzione ad un sol valore, generalmente si considera il ramo principale corrispondente all'intervallo principale  $0 \leq \vartheta < 2\pi$  ( $-\pi \leq \vartheta < \pi$ ). Se l'intervallo principale è  $[0 ; 2\pi)$  il risultato voluto si raggiunge erigendo una barriera (detta retta di diramazione) rappresentata dal semiasse positivo delle  $x$ . Se per  $\vartheta$  si sceglie un intervallo diverso, la retta di diramazione sarà qualche altra semiretta del piano con origine il punto di diramazione.

Per alcune applicazioni (come vedremo più avanti) si considera la linea in figura.



## Derivazione Complessa

Sia  $w = f(z)$  una funzione ad un sol valore della variabile complessa  $z$ , definita in un dominio  $D$  (aperto connesso) del piano complesso. Per definire il concetto di derivata di una tale funzione utilizzeremo la stessa definizione che si dà per le funzioni reali di una variabile reale, definite in intervalli.

Sia  $z$  un punto fissato in  $D$  e  $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$  un incremento di  $z$  tale che  $z + \Delta z$  stia ancora in  $D$ . Consideriamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + j(v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y))}{\Delta x + j\Delta y}$$

ed il suo limite per  $\Delta z \rightarrow 0$  oppure per  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ .

Se tale limite esiste (indipendentemente dal modo in cui  $\Delta z \rightarrow 0$ ), diremo che  $f$  è derivabile nel punto  $z$  ed assumeremo il valore di tale limite, che sarà indicato con  $f'(z)$ , come la derivata di  $f$  nel punto  $z$ . È ovvio che

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Osserviamo subito che ogni funzione derivabile in un punto  $z$  è ivi continua. Infatti da

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \Delta z$$

segue che

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z) \cdot 0 = 0$$

Supponiamo che  $f$  sia derivabile in  $D$  (cioè in tutti i punti di  $D$ ); allora ad ogni  $z \in D$  resta associato il valore della derivata  $f'(z)$  e questa è ovviamente una nuova funzione (ad un sol valore) definita in  $D$ .

Per la derivata sono usate anche le notazioni:

$$Df(z), \frac{df}{dz}, f'(z)$$

Le derivate di ordine superiore si definiscono ovviamente nello stesso modo, per esempio è

$$f''(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z}.$$

Sottolineiamo il fatto che l'esistenza del limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

non dipende dal modo con cui  $\Delta z \rightarrow 0$ , pertanto se risulta:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \neq \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

allora si deve concludere che  $f$  non è derivabile in  $z$ .

### Esempi.

Sia  $f(z) = z^n$  dove  $n$  è un intero positivo; allora:

$$f'(z) = nz^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Infatti risulta

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{z^n - a^n}{z - a} = z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}$$

da cui, passando al limite per  $z \rightarrow a$ , si ottiene

$$f'(a) = na^{n-1} \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

Sia  $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $z_0 = x_0 + jy_0$ . Essendo

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} [(x - x_0) - j(y - y_0)]$$

segue che

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -j \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \quad z_0 \neq 0$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x \rightarrow x_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \quad z_0 \neq 0$$

Poiché i limiti precedenti sono diversi, per quanto osservato in precedenza, si evince che la funzione  $f(z) = |z|$  non è derivabile in  $\mathcal{C} - \{0\}$ .

Infine, osservato che nel caso in cui è  $z_0 = 0$ , risulta

$$\lim_{\substack{y=0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{f(z)}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

possiamo concludere che la funzione  $f(z) = |z|$  non è derivabile in  $\mathcal{C}$ .

Analogamente si dimostra che la funzione  $f(z) = \bar{z}$  non è derivabile in  $\mathcal{C}$ .

Procedendo come nel caso delle funzioni reali si dimostra che nei punti in cui  $f$  e  $g$  sono entrambi derivabili risulta:

a)  $(f + g)' = f' + g'$  ;

b)  $(fg)' = f'g + fg'$  ;

c)  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

ovviamente la c) vale solo nei punti in cui è  $g(z) \neq 0$ .

Se  $f$  è derivabile in  $a$  e  $g$  è derivabile in  $f(a)$ , allora  $h(z) = g[f(z)]$  è derivabile in  $a$  e risulta:

$$h'(a) = \frac{dg}{dw} \frac{dw}{dz}(a) \quad \text{dove } w = f(z).$$

Inoltre si dimostra che:

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z \quad ; \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{senz} \quad ; \quad \frac{d}{dz} e^z = e^z$$

e così via.