Coordinate polari

Il sistema delle coordinate cartesiane è uno dei possibili sistemi per individuare la posizione di un punto del piano, relativamente ad un punto fisso O, mediante una coppia ordinata di numeri. Un altro sistema è quello delle coordinate polari. Un riferimento polare è individuato da:

1. un punto O detto polo o origine;
2. una semiretta orientata *x* per O, detta asse polare;
3. un'unità di misura per i segmenti.

Ad ogni coppia (ordinata) di numeri (ρ,θ) corrisponde uno ed un solo punto P del piano. Il , viceversa non è vero.

Alla coppia (ρ,θ) corrisponde il punto P:

a. la cui distanza da O, misurata con la prefissata unità di misura, è ρ : $\rho=\overline{OP}$;
b. che giace sulla semiretta di origine O, che forma con l'asse polare un angolo θ, orientato nel verso antiorario e misurato in radianti. (vedi figura 1 e 2).

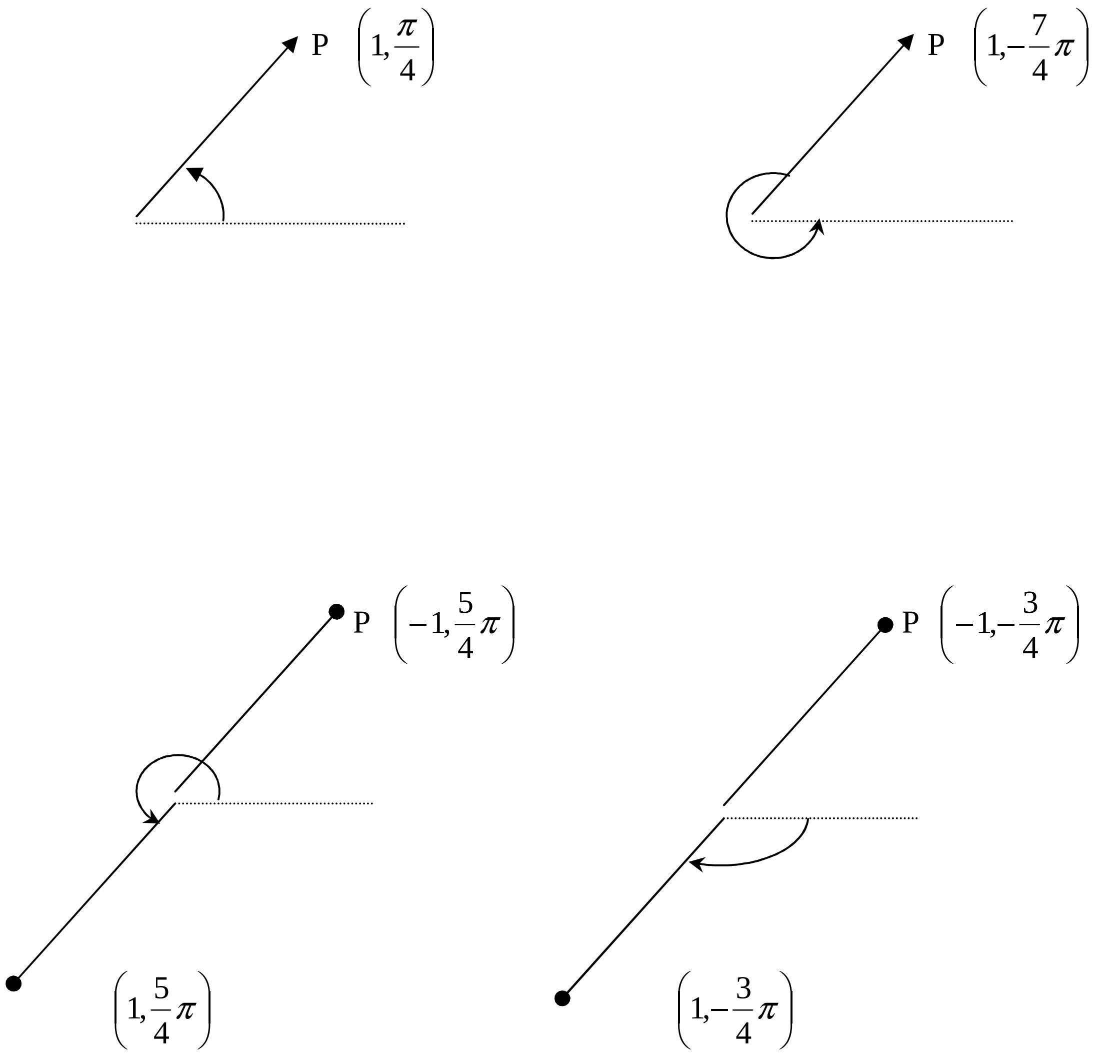
Viceversa un punto P può venire descritto come $(\rho,\theta+2k\pi)$ dove *k* è un intero positivo qualsiasi, incluso lo zero.
In particolare le coordinate polari del polo possono essere date come $(0,\theta)$ con θ arbitrario. Il numero ρ strettamente positivo è detto raggio vettore di P, mentre l'angolo θ , che è determinato a meno di multipli di 2π, è detto anomalia di P.
Il punto P $(-\rho,\theta)$ appartiene alla semiretta opposta alla semiretta di anomalia θ ovvero $(-\rho,\theta)$ e $(\rho,\theta+\pi)$ sono le coordinate dello stesso punto. Pertanto un punto P può essere descritto come $(\rho,\theta\pm 2k\pi)$ o $(-\rho,\theta\pm(2k+1)\pi)$ vedi esempio successivo.

Osservazioni

1. Tutti i punti del piano si ottengono prendendo il valore principale dell'anomalia, cioè facendo variare ϑ da zero incluso a 2π escluso. Però la limitazione $0\le\vartheta\le 2\pi$ conduce a discontinuità per i punti dell'asse polare: se un punto P si muove su un arco di curva che attraversi l'asse polare in un punto M, la sua anomalia tenderebbe a zero ovvero a 2π a seconda che P si avvicini ad M da una parte o dall'altra. Per questo si preferisce definire l'anomalia a meno di multipli di 2π .
2. Il luogo dei punti che hanno un dato raggio vettore: $\rho=a$, è la circonferenza di centro O e raggio a .
3. Il luogo dei punti che hanno una data anomalia $(\vartheta=\vartheta_0)$ è la semiretta per O che forma l'angolo ϑ_0 con l'asse polare, mentre la semiretta opposta è il luogo dei punti la cui anomalia è $\vartheta_0+\pi$.

Esempio

Il punto P $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ ha le seguenti rappresentazioni:



Queste rappresentazioni e tutte le altre si possono riassumere nelle due formule

$$\left(1,\frac{\pi}{4}\pm 2k\pi\right) \quad \left(-1,\frac{5}{4}\pm 2k\pi\right) \quad k = 0, 1, 2\ldots$$

Cambiamento di variabile

Un riferimento cartesiano ortogonale ed un riferimento polare si dicono associati se:

1. l'origine dell'un coincide con il polo dell'altro;
2. il semiasse positivo dell'asse *x* coincide con il semiasse polare;
3. l'unità di misura per i segmenti è la stessa per i due riferimenti.

Nelle condizioni precedenti ogni punto P del piano, distinto da O, ha due coordinate polari $(\rho, 0)$ e due coordinate cartesiane (x, y). Le formule di passaggio dalle coordinate polari a quelle cartesiane sono date da

$$x = \rho\cos\theta \text{ e } y = \rho\sin\theta$$

Le formule inverse,che esprimono le coordinate polari in funzione delle coordinate cartesiane, sono date da

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

queste ultime individuano univocamente l'anomalia θ.

Esempi di curve in coordinate polari

La curva, la cui equazione in coordinate polari è $\rho = f(\vartheta)$ o $F(\rho, \vartheta) = 0$, consiste di tutti i punti distinti (ρ, ϑ) che soddisfano l'equazione. Sussistono i seguenti criteri di simmetria. Ecco alcuni esempi di curve in coordinate polari,i cui grafici sono mostrati in figura.

1. Le curve le cui equazioni in coordinate polari sono:

$$\rho = a(1 + \cos\vartheta)\ ,\ \rho = a(1 - \cos\vartheta)$$
$$\rho = a(1 + \sin\vartheta)\ ,\ \rho = a(1 - \sin\vartheta)$$

Dove $0 \le \vartheta \le 2\pi$ vengono dette **cardioidi**, in quanto il loro grafico ha la forma di cuore. Le funzioni $f(\vartheta) = a(1 \pm \cos\vartheta)$ e $g(\vartheta) = a(1 \pm \sin\vartheta)$ sono rispettivamente simmetriche rispetto all'asse x e all'asse y. Infatti risulta $f(-\vartheta) = f(\vartheta)$ e $g(\pi - \vartheta) = g(\vartheta)$

2. Le equazioni

$$\rho^2 = a^2\cos 2\vartheta\ ,\ \rho^2 = -a^2\cos 2\vartheta$$
$$\rho^2 = a^2\sin 2\vartheta\ ,\ \rho^2 = -a^2\sin 2\vartheta$$

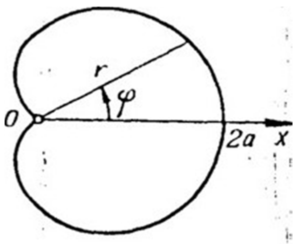
rappresentano curve a forma di eliche centrate nell'origine chiamate **lemniscate**.
Si osserva che le funzioni $f(\vartheta) = \pm a^2\cos 2\vartheta$sono simmetriche rispetto all'asse x e all'asse y.
Infatti $f(\pi - \vartheta) = f(\vartheta)$.

Le funzioni $G(\rho,\vartheta)=\rho^2 \pm a^2 \sin 2\vartheta$ sono simmetriche rispetto all'origine;
infatti è $G(-\rho,\vartheta)=G(\rho,\vartheta)$.

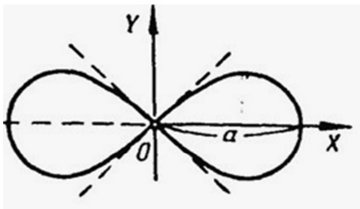
3. Le equazioni

$$\rho = a\vartheta \quad a \geq 0 \ , \ \rho = a\vartheta \quad a \leq 0$$

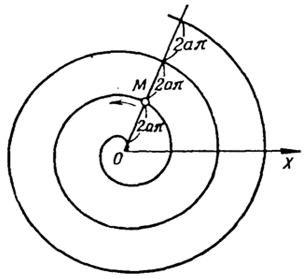
rappresentano spirali, note come **spirali di Archimede**, che si avvolgono intorno all'origine, rispettivamente nel verso antiorario $(\vartheta \geq 0)$ e nel verso orario $(\vartheta \leq 0)$



28. Cardioid, $r = a(1+\cos\varphi)$.



25. Bernoulli's lemniscate, $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ or $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.



30. Spiral of Archimedes, $r = a\varphi$.

Osservazioni

i. L'equazione $f = f(\vartheta)$ in coordinate polari ha nel piano xy lo stesso grafico della coppia di equazioni parametri

$$x = f(\vartheta)\cos\vartheta \ , \ y = f(\vartheta)\sin\vartheta .$$

Esempio la spirale $\rho = \vartheta$ ha equazioni parametriche

$$x = \vartheta\cos\vartheta \ , \ y = \vartheta\sin\vartheta .$$

ii. Per tracciare il grafico di una curva $f = f(\vartheta)$ data in coordinate polari è opportuno calcolare il valore di ρ per alcuni valori ϑ;
trovare i punti in cui ρ e $f'(\vartheta)$ sono uguali a zero;
studiare il segno di $f'(\vartheta)$;
individuare le eventuali simmetrie.

Equazioni polari di vari tipi di rette e circonferenze

1. La retta parallela all'asse *y* (ovvero perpendicolare all'asse *x*) e passante per il punto di coordinate $(a,0)$ ha equazione

$$x = a$$

per esprimere questa equazione in coordinate polari sostituiamo $x = \rho\cos\theta$;
ciò da

$$\rho\cos\theta = a \quad \text{ovvero} \quad \rho = \frac{a}{\cos\theta}$$

2. La retta parallela all'asse *x* (ovvero perpendicolare all'asse *y*) e passante per il punto di coordinate $(0,b)$ ha equazione

$$y = b$$

per esprimere questa equazione in coordinate polari sostituiamo $y = \rho\sin\theta$;
ciò da

$$\rho\sin\theta = b \quad \text{ovvero} \quad \rho = \frac{b}{\sin\theta}$$

3. Per esprimere l'equazione di una retta passante per l'origine:

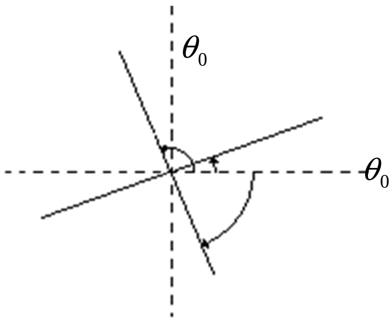
$$y = mx$$

in coordinate polari sostituiamo $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$;
ciò da

$$\rho\sin\theta = m\rho\cos\theta \text{ ovvero } \tan\theta = m$$

da cui

$$\theta = \begin{cases} \arctan m & m \geq 0 \\ \arctan m + \pi & m < 0 \end{cases} \quad \text{ovvero } \theta = \theta_0$$



Dove θ_0 è l'angolo che la retta per l'origine forma con l'asse polare.

4. Sostituendo $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$ nell'equazione $y = mx + n$ otteniamo l'equazione generale di una retta in coordinate polari:

$$\rho\sin\theta = \rho m\cos\theta + n \quad \text{ovvero} \quad \rho = \frac{n}{\sin\theta - m\cos\theta}$$

5. Sostituendo $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$ nelle equazioni delle seguenti circonferenze:

i) $x^2 + y^2 = 2ax$	$a > 0$
ii) $x^2 + y^2 = -2ax$	“
iii) $x^2 + y^2 = 2ay$	“
iv) $x^2 + y^2 = -2ay$	“

si ottengono le corrispondenti equazioni in coordinate polari:

i) $\rho = 2a\cos\theta$	$a > 0$
ii) $\rho = -2a\cos\theta$	“
iii) $\rho = 2a\sin\theta$	“
iv) $\rho = -2a\sin\theta$	“

Ovviamente l’equazione in coordinate polari della circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$ è

$$\rho = a \qquad a > 0$$

Osservazione

L’equazione $\rho = f(\theta)$ in coordinate polari ha nel piano *xy* lo stesso grafico della curva di equazioni parametriche

$$x = f(\theta)\cos\theta \qquad y = f(\theta)\sin\theta$$

Per esempio la spirale $\rho = 0$ ha equazioni parametriche

$$x = \theta\cos\theta \qquad y = \theta\sin\theta$$